HÀ VĂN CHƯƠNG

Tuyển chọn 400 BÀI TOÁN Đại số 10

BAN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

- Các kiến thức cơ bản và nâng cao
- 400 bài toán áp dụng và minh họa
- Giải chi tiết các bài toán
- 99 câu hỏi trắc nghiệm

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀ VĂN CHƯƠNG

TUYỂN CHỌN 400 BÀI TOÁN ĐẠI SỐ 10

- CÁC KIẾN THỨC TỔNG QUÁT
- 400 BÀI TOÁN ÁP DỤNG VÀ MINH HỌA
- GIẢI CHI TIẾT
- 99 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương 1

ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

I. Mệnh đề

*Khác với các mệnh đề hiểu theo nghĩa thông thường, mệnh đề toán học là một mệnh đề **có** và **chỉ có** một trong hai chân trị đúng (Đ), hoặc sai (S), chẳng hạn :*

- *7 là một số nguyên tố (Đ)*
- *Tam giác đều không phải là một tam giác cân (S)*

Lí thuyết : Đại số mệnh đề chỉ nghiên cứu những loại mệnh đề toán học như trện, không nghiên cứu những loại mệnh đề thông thường mà chân trị của nó không được xác định rõ ràng, ví dụ như các mệnh đề sau :

- *Trời hôm nay đẹp.*
- *Cô A là một học sinh ngoan.*

II. Phủ định của một mệnh đề

Mệnh đề phủ định của một mệnh đề A, kí hiệu $\overline{A}$ là một mệnh đề có chân trị ngược với mệnh đề A; nghĩa là nếu A là đúng thì $\overline{A}$ là sai và ngược lại. Do đó ta có bảng chân trị :

A	$\overline{A}$
Đ	S
S	D

III. Giao và hội của hai mệnh đề

1. *Mệnh đề hội*

Hội của hai mệnh đề A và B, kí hiệu là $A \vee B$ là một mệnh đề có chân trị :

- *$A \vee B$ là đúng nếu có ít nhất một trong hai mệnh đề A hay B đúng.*
- *$A \vee B$ là sai nếu cả hai mệnh đề A và B đều sai.*

Ta có bảng chân trị mệnh đề hội như sau :

A	B	$A \vee B$
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ
S	S	S

2. *Mệnh đề giao*

Giao của hai mệnh đề A và B là một mệnh đề, kí hiệu là $A \wedge B$, *là mệnh đề có chân trị cho bởi :*

- $A \wedge B$ *là đúng, nếu cả hai mệnh đề A và B là đúng.*
- $A \wedge B$ *là sai, nếu có ít nhất một trong hai mệnh đề A hay B là sai.*
- *Ta có bảng chân trị như sau :*

A	B	$A \wedge B$
Đ	Đ	Đ
S	S	S
Đ	S	S
S	Đ	S

3. *Phủ định của mệnh đề hội, mệnh đề giao*

Từ định nghĩa của mệnh đề hội, giao và phủ định của mệnh đề ta đi đến :

- *Bảng chân trị của phủ định mệnh đề hội :*

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	Đ	S
S	Đ	Đ	S
S	S	S	Đ

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
Đ	Đ	S	S	S
Đ	S	S	Đ	S
S	Đ	Đ	S	S
S	S	Đ	Đ	Đ

Từ hai bảng chân trị trên ta có : $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

- *Bảng chân trị của phủ định mệnh đề giao :*

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$
Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	S	Đ
S	Đ	S	Đ
S	S	S	Đ

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
Đ	Đ	S	S	S
Đ	S	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ

Từ hai bảng chân trị trên ta có : $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

IV. Phép kéo theo và tương đương

1. *Phép kéo theo*

Nếu A và B là các mệnh đề thì mệnh đề $A \Rightarrow B$ đọc là "A kéo theo B" hoặc "A suy ra B" là một mệnh đề có chân trị là : nó chỉ sai khi A đúng và B sai. Ta có bảng chân trị :

A	B	$A \Rightarrow B$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

Ta còn gọi : "A" là giả thiết, "B" là kết luận.

2. *Phép tương đương*

Nếu ta có $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$, ta có "A tương đương với B" và viết $A \Leftrightarrow B$

Ta có $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Ta có bảng chân trị :

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S
S	Đ	Đ	S	S
S	S	Đ	Đ	Đ

- *Mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ là đúng khi cả hai mệnh đề A và B hoặc cùng đúng, hoặc là cùng sai.*
- *Ta có $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (Chứng minh bằng cách lập bảng chân trị)*

V. Áp dụng vào phép suy luận toán học

1. *Điều kiện cần và đủ*

Các định lí toán học thường được diễn tả dưới dạng mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$.

Lúc đó ta nói : A là giả thiết, B là kết luận.

Hay : A là điều kiện đủ để có B

B là điều kiện cần để có A.

Ví dụ : *Một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó cân.*

Vậy : A là mệnh đề : một tam giác có hai góc bằng nhau

B là mệnh đề : tam giác cân.

2. *Định lí đảo*

Giả sử có một định lí, được phát biểu dưới dạng $A \Rightarrow B$ và nếu $B \Rightarrow A$ là một mệnh đề đúng, thì $B \Rightarrow A$ được gọi là định lí đảo của định lí $A \Rightarrow B$.

Ví dụ : *Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau, thì tam giác đó cân ($A \Rightarrow B$).*

Đảo lại: Nếu tam giác cân thì tam giác có hai góc bằng nhau ($B \Rightarrow A$).

- *Nếu $A \Rightarrow B$ đúng và $B \Rightarrow A$ đúng thì $A \Leftrightarrow B$ đúng.*

3. *Định lí phản đảo và phép chứng minh phản chứng*

***a)** Định lí phản đảo :*

Nếu định lí được phát biểu dưới dạng $A \Rightarrow B$ thì định lí phát biểu dưới dạng $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ được gọi là định lí phản đảo của định lí trên.

Nhờ bảng chân trị ta có $A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

***b)** Phép chứng minh phản chứng :*

Giả sử cần chứng minh định lí $A \Rightarrow B$. Ta đi chứng minh $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ là đúng. Phép chứng minh như thế được gọi là phép chứng minh phản chứng.

Ví dụ : *Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.*

Giải : *Ta chứng minh bằng phương pháp chứng minh phản chứng.*

Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ, do đó $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ với p, q là những số nguyên dương ($\frac{p}{q}$ tối giản).

Từ đó : $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2q^2 = p^2$.

Vậy p^2 là số chẵn, tức là p là số chẵn, do đó : $p = 2p' \quad (p' \in N)$ (1)

Khi đó $2q^2 = 4p'^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2p'^2$.

$\Rightarrow q^2$ là số chẵn, tức là q cũng là số chẵn, do đó : $q = 2q' \quad (q' \in N)$ (2)

Từ (1), (2) ta có : $$\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} \qquad (3)$$

Điều (3) chứng tỏ $\frac{p}{q}$ không tối giản. Mâu thuẫn với giả thiết là $\frac{p}{q}$ tối giản.

Vậy sự giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ là sai.

Do đó $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

1 Chứng minh :

1) $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$ **2)** $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{A} = \overline{A}$.

Giải

1) Lập bảng chân trị :

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
Đ	Đ	S	Đ	Đ
Đ	S	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ

Ta thấy $A \Rightarrow B$ và $\overline{A} \vee B$ cùng bảng chân trị nên $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$.

2) Lập bảng chân trị :

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{A}$
Đ	Đ	S	Đ	S
Đ	S	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ

Ta thấy $\overline{A}$ và $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{A}$ cùng bảng chân trị nên $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{A} = \overline{A}$.

2 Chứng minh các mệnh đề sau :

1) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

2) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Giải

1) Lập bảng chân trị :

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	S	S	S
S	S	Đ	S	S	Đ	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Vì $A \wedge (B \wedge C)$ và $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ cùng bảng chân trị nên :

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

2) Lập bảng chân trị :

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	S	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S
S	Đ	S	Đ	S	S	S	S
S	S	Đ	Đ	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Vì $A \wedge (B \vee C)$ và $(A \wedge B) \vee (A \vee C)$ cùng bảng chân trị nên :

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

3 Chứng minh :

1) $(A \wedge B) \Rightarrow C = \overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$

2) $(\overline{C} \wedge A) \Rightarrow \overline{B} = (\overline{C} \wedge B) \Rightarrow \overline{A}$.

Giải

1) Lập bảng chân trị :

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \wedge B) \Rightarrow C$	$\overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$
Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	S	S
Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ

Ta có : $(A \wedge B) \Rightarrow C$ và $\overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$ cùng bảng chân trị

Nên : $(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv \overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$.

2) Lập bảng chân trị :

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{C} \wedge A$	$\bar{C} \wedge B$	$(\bar{C} \wedge A) \Rightarrow \bar{B}$	$(\bar{C} \wedge B) \Rightarrow \bar{A}$
Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	S
Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ
S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ

Ta có : $(\bar{C} \wedge A) \Rightarrow \bar{B}$ và $(\bar{C} \wedge B) \Rightarrow \bar{A}$ có cùng bảng chân trị

Nên : $(\bar{C} \wedge A) \Rightarrow \bar{B} = (\bar{C} \wedge B) \Rightarrow \bar{A}$.

4 Chứng minh : $A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Giải

Lập bảng chân trị ta có :

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \Rightarrow B$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S	S
S	Đ	Đ	S	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ	Đ

Ta thấy $A \Rightarrow B$ và $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ có cùng bảng chân trị

Nên : $A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

5 Chứng minh : $A \Rightarrow (B \wedge C) = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$.

Giải

Lập bảng chân trị ta có

A	B	C	$B \wedge C$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \wedge C)$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	S
Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S
Đ	S	S	S	S	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ

Ta thấy $A \Rightarrow (B \wedge C)$ và $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$ cùng bảng chân trị

Nên : $A \Rightarrow (B \wedge C) = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$.

6 Chứng minh : $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

Giải

Lập bảng chân trị :

A	B	$\overline{B}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A \Rightarrow B}$	$A \wedge \overline{B}$
Đ	Đ	S	Đ	S	S
Đ	S	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S
S	S	Đ	Đ	S	S

Thấy $\overline{A \Rightarrow B}$ và $A \wedge \overline{B}$ cùng bảng chân trị nên : $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

7 Chứng minh : $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow C = A \vee B \vee C$.

Giải

Lập bảng chân trị :

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow C$	$A \vee B$	$A \vee B \vee C$
Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ
S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S

Ta thấy $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow C$ và $A \vee B \vee C$ có cùng bảng chân trị

Nên : $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow C = A \vee B \vee C$.

8 Chứng minh : $\overline{A \Rightarrow B} \vee (\overline{A \Rightarrow C}) = A \wedge (B \Rightarrow \overline{C})$.

Giải

Lập bảng chân trị :

A	B	C	$\overline{C}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A \Rightarrow B}$	$A \Rightarrow C$	$\overline{A \Rightarrow C}$	$B \Rightarrow \overline{C}$	$(\overline{A \Rightarrow B}) \vee (\overline{A \Rightarrow C})$	$A \wedge (B \Rightarrow \overline{C})$
Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	S
Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	S
S	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S
S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S
S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S

Ta thấy $(\overline{A \Rightarrow B}) \vee (\overline{A \Rightarrow C})$ và $A \wedge (B \Rightarrow \overline{C})$ cùng bảng chân trị

Nên : $(\overline{A \Rightarrow B}) \vee (\overline{A \Rightarrow C}) = A \wedge (B \Rightarrow \overline{C})$.

9 Trong các phát biểu sau, cho biết phát biểu nào là mệnh đề, và nếu là mệnh đề thì đúng hay sai.

a) Số 12 là một số chẵn.

b) $2x + 5$ là một số nguyên dương.

c) Bạn có chăm học không ?

d) Luân Đôn không phải là thủ đô nước Anh.

Giải

a) Mệnh đề đúng.

b) Không phải là mệnh đề.

c) Không phải là mệnh đề.

d) Mệnh đề sai.

10 Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ? Giải thích :

a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có 1 cạnh bằng nhau.

c) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc (trong bằng tổng của 2 góc còn lại.

d) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai trung tuyến bằng nhau và một góc bằng 60^o.

Giải

a) Đây là mệnh đề sai. Thật vậy, gọi A và B là các mệnh đề :

A : "hai tam giác bằng nhau"

B : "hai tam giác có diện tích bằng nhau"

Ta có : mệnh đề $A \Rightarrow B$ đúng, nhưng mệnh đề $B \Rightarrow A$ sai.

Do đó mệnh đề đã cho sai.

b) Đây là mệnh đề sai. Thật vậy, gọi A và B là các mệnh đề :

A : "Hai tam giác bằng nhau"

B : "Hai tam giác đồng dạng có 1 cạnh bằng nhau"

Thì $A \Rightarrow B$ đúng, nhưng $B \Rightarrow A$ sai. Do đó mệnh đề cho sai.

c) Mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề đúng.

11 Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

a) $\exists x \in R, x > x^2$.

b) $\forall x \in R, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

c) $\forall n \in N, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

d) $\exists a \in Q, a^2 = 2$.

Giải

a) Mệnh đề đúng, chẳng hạn $x = \frac{1}{10}$.

b) Mệnh đề sai.

Mệnh đề đúng là : $\forall x \in R, |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

c) Mệnh đề đúng. Thật vậy :

- Nếu $n = 3k \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ không chia hết cho 3.
- Nếu $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ (n : không chia hết cho 3)

  thì $n^2 + 1 = 3k' + 2$ ($k' \in N$) không chia hết cho 3.

Tóm lại : $\forall n \in N : n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

d) Mệnh đề sai, vì $\sqrt{2} \notin Q$.

Mệnh đề đúng là $\forall a \in Q : a^2 \neq 2$.

12 Xét xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai và lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề.

a) $\exists x \in Q : 4x^2 - 1 = 0$.

b) $\exists n \in N$, $n^2 + 1$ chia hết cho 4.

c) $\forall x \in R$, $(x - 1)^2 \neq x - 1$.

d) $\forall n \in N$, $n^2 > n$.

Giải

a) Mệnh đề a đúng, phủ định là : $\forall x \in Q : 4x^2 - 1 \neq 0$

b) Mệnh đề sai, phủ định là : $\forall n \in N$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

c) Mệnh đề sai, chẳng hạn với $x = 1$ (hoặc $x = 2$).

Phủ định là : $\exists x \in R : (x - 1)^2 = x - 1$.

d) Mệnh đề sai, chẳng hạn với $n = 0$ (hoặc $n = 1$).

Phủ định là : $\exists n \in N : n^2 \leq n$.

13 Phát biểu các định lí sau đây, sử dụng khái niệm "điều kiện đủ" :

a) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau

c) Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

d) Nếu $a + b > 0$ thì một trong hai số a và b phải dương.

Giải

a) Điều kiện đủ để hai đường thẳng phân biệt song song với nhau là nó cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba.

b) Điều kiện đủ để 2 tam giác có diện tích bằng nhau là hai tam giác đó bằng nhau.

c) Điều kiện đủ để một số tự nhiên chia hết cho 5 là nó có chữ số tận cùng là chữ số 5.

d) Điều kiện đủ để một trong hai số a và b phải dương là $a + b > 0$.

14 Phát biểu các định lí sau, sử dụng khái niệm "Điều kiện cần" :

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau.

b) Nếu tứ giác T là 1 hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.

d) Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.

Giải

a) Điều kiện cần để hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau là 2 tam giác bằng nhau.

b) Điều kiện cần để một tứ giác T có 2 đường chéo vuông góc với nhau là nó là 1 hình thoi.

c) Điều kiện cần để một số tự nhiên chia hết cho 3 là nó chia hết cho 6.

d) Điều kiện cần để $a^2 = b^2$ là $a = b$.

15 Hãy sửa lại (nếu cần) các mệnh đề sau đây để được mệnh đề đúng.

a) Để tứ giác T là một hình vuông, điều kiện cần và đủ là nó có 4 cạnh bằng nhau.

b) Để tổng hai số tự nhiên chia hết cho 7, điều kiện cần và đủ là mỗi số chia hết cho 7.

c) Để $ab > 0$, điều kiện cần và đủ là hai số a và b đều dương.

d) Để một số nguyên dương chia hết cho 3, điều kiện đủ là nó chia hết cho 9.

Giải

a) Mệnh đề sai. Sửa lại là : Để tứ giác T là một hình vuông điều kiện cần là nó có 4 cạnh bằng nhau.

b) Mệnh đề sai. Sửa lại là : Để tổng hai số tự nhiên chia hết cho 7, điều kiện đủ là mỗi số chia hết cho 7.

c) Mệnh đề sai. Sửa lại là : Để $ab > 0$, điều kiện đủ là cả hai số a và b đều dương.

d) Mệnh đề đúng.

16 Chứng minh các mệnh đề sau là đúng bằng phương pháp phản chứng.

a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.

b) Một tam giác không phải là tam giác đều thì nó có ít nhất một góc (trong) nhỏ hơn 60°.

c) Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

Giải

a) Giả sử $\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \end{cases}$. Thế thì $a + b \geq 2$ (trái với giả thiết)

Vậy $a < 1$ hoặc $b < 1$.

b) Không làm mất tính tổng quát của bài toán. Ta giả sử $A \geq B \geq C$.

Vì tam giác ABC không phải là tam giác đều, ta còn có $A > C$.

Nếu $C \geq 60^\circ$ thì $A + B + C > 180^\circ$ (vô lí). Vậy $C < 60^\circ$.

c) Giả sử : $x + y + xy = -1$. Suy ra : $x + y + xy + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $(x + 1)(y + 1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = -1$ hoặc $y = -1$ (trái với giả thiết).

Vậy : $x + y + xy \neq -1$.

TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

* *Tập hợp là 1 từ nguyên thủy, không định nghĩa được.*

- *Tập hợp X gồm 3 phần tử, được viết là* $X = \{a, b, c\}$.
- *Phần tử a thuộc tập hợp X, ta viết* $a \in X$.
- *Phần tử b không thuộc tập hợp X, ta viết* $b \notin X$.
- *Tập hợp các số nguyên tự nhiên :* $N = \{0, 1, 2, ...\}$
- *Tập hợp các số nguyên :* $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- *Tập hợp các số hữu tỉ :* $Q = \left\{\frac{p}{q} / p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}$
- *Tập hợp các số thực :* R.

* *Tập hợp không chứa phần tử nào cả, gọi là tập hợp rỗng. Kí hiệu* $\varnothing$.

* – *Tập hợp A gọi là tập hợp con của tập hợp B, nếu mọi phần tử của A đều thuộc B. Kí hiệu* $A \subset B$.

- *Mọi tập hợp đều là tập hợp con của chính nó :* $A \subset A$

* *Khoảng* $(a, b) = \{x \in R / a < x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in R) / x > a\}$

$(-\infty, a) = \{x \notin R / x < a\}$.

* *Đoạn* $[a, b] = \{a \in R / a \leq x \leq b\}$

* *Nửa khoảng :* $[a, b) = \{x \in R / a \le x < b\}, [a, +\infty) = \{x \in R / a \le x\}$

$(a, b] = \{x \in R / a < x \le b\}; (-\infty, a] = \{x \in R / x \le a\}$.

* *Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau khi mọi phần tử của A đều thuộc về B và mọi phần tử của B đều thuộc A. Kí hiệu A = B.*

Vậy : $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \overset{d.n}{\Leftrightarrow} A = B$

* *Hội (hợp) của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc về ít nhất một trong 2 tập hợp này. Kí hiệu* $A \cup B$.

Vậy : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hay } x \in B\}$

* *Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử đồng thời thuộc về A và B. Kí hiệu* $A \cap B$.

Vậy : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.

* *Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc về A nhưng không thuộc về B. Kí hiệu* $A \setminus B$.

Vậy : $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

* *Giả sử B là một tập hợp con của tập hợp A. Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc về A nhưng không thuộc về B. Kí hiệu* C_A^B. *Gọi là phần bù của tập B trong tập A.*

B. BÀI TẬP

17 Tìm các tập hợp con của :

1) $A = \{a, b\}$. **2)** $B = \{1, 2, 3\}$.

Giải

1) Các tập hợp con của tập hợp A là : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, A.

2) Các tập hợp con của tập hợp B là : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, B.

Ghi chú : Tập hợp X có n phần tử, thì X có 2^n tập con.

18 Viết lại các tập hợp sau đây bằng cách liệt kê các phần tử :

1) $A = \{x \in N \mid x < 5\}$.

2) $B = \{x \in Z \mid -2 < x \le 3\}$.

3) $C = \{x \mid x = 3k \text{ với } k \in Z \text{ và } -1 < x < 12\}$.

4) $D = \left\{x \mid x = \dfrac{1}{2^k} \text{ với } k \in N \text{ và } x \ge \dfrac{1}{8}\right\}$.

Giải

1) A là tập hợp các s tự nhiên nhỏ hơn 5.

Nên : $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

2) B là tập hợp các số nguyên lớn hơn -2 và nhỏ hơn hay bằng 3.

Nên : $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

3) C là tập hợp các bội số của 3, lớn hơn -1 và nhỏ hơn 12.

Nên : $C = \{0, 3, 6, 9\}$

4) D là tập hợp các số có dạng $\frac{1}{2^k}$ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{8}$.

Nên : $D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$.

19 Xác định tập hợp bằng cách nêu tính chất các phần tử :

1) $B = \{3, 9, 27, 81\}$ **2)** $C = \{4, 16, 36, 64, 100\}$.

Giải

1) Vì $B = \{3, 3^2, 3^3, 3^4\} = \{3^n \mid n \in N, 1 \le n \le 4\}$

2. Vì $C = \{4, 4.2^2, 4.3^2, 4.4^2, 4.5^2\} \Rightarrow C = \{4n^2 \mid n \in N, 1 \le n \le 5\}$.

20 Cho $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{-1, 2, 4, 5\}$.

Xác định : $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $P(A)$ (các tập hợp con của A).

Giải

Ta có : $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A \cap B = \{2\}$.

$A \backslash B = \{1, 3\}$.

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1,3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

21 Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$.

Tìm C_A^B, C_A^C, $C_A^{(B \cup C)}$, $C_A^B \cap C_A^C$.

Giải

Ta có : $C_A^B = A \backslash B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

$C_A^C = A \backslash C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$C_A^{(B \cup C)} = A \backslash (B \cup C) = \{5, 7, 9\}$.

Ta có : $C_A^B \cap C_A^C = \{5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{5, 7, 9\}$.

22 Xác định $B = \{0, 4, 8, 16\}$ bằng cách nêu tính chất.

Giải

Ta có thể viết :

$B = \{x \mid x = 4n, n \in N \text{ và } n \leq 4\}$

Hay $B = \{x \mid x(x - 4)(x - 8)(x - 16) = 0\}$.

23 Cho các tập hợp : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$.

Tìm $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.

Giải

Ta có : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \cap C = \{3, 4\}$

$B \cap C = \{4, 6\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 6\}$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

24 Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$, $C = \{a, b, e\}$. Chứng minh:

1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Giải

1) Ta có : $B \setminus C = \{d\}$, $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cap C = \{a, b\}$

Ta có : $A \cap (B \setminus C) = \{d\}$, $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = \{d\}$

Vậy : $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

2) Ta có : $(B \cap C) = \{b, e\}$, $A \setminus B = \{a, c\}$, $A \setminus C = \{c, d\}$

Ta có : $A \setminus (B \cap C) = \{a, c, d\}$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{a, c, d\}$

Vậy : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

25 Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và các tập hợp con của E là :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Tìm C_E^A, C_E^B, $C_E^{A \cup B}$, $C_E^A \cap C_E^B$.

Giải

Ta có : $C_E^A = E \backslash A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$C_E^B = E \backslash B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C_E^{A \cup B} = E \backslash (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$

$C_E^A \cap C_E^B = \{5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{5, 7, 9\}$.

26 Cho tập hợp $A = \{x \in Z / -4 \leq x < 3\}$, $B = \{x/x = 2k \text{ với } k \in N\}$

Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Giải

Ta liệt kê các tập hợp A, B : $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{0, 2, 4, 6, ..., 2k ...\}$

Nên $A \cap B = \{0, 2\}$

$A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}$.

27 Cho các tập hợp : $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{2, 3, 4\}$.

Tìm $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ và $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Giải

- Ta có : $A \cup B = \{a, b, 1, 2, 3\}$; $C \cup D = \{b, c, 2, 3, 4\}$

  Vậy : $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{b, 2, 3\}$
- Ta có : $A \cap B = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$

  Vậy : $(A \cap D) \cup (C \cap D) = \varnothing$

PHÉP CHỨNG MINH QUY NẠP (TRUY CHỨNG – TRUY HỒI)

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

Muốn chứng minh một mệnh đề toán học P(n) đúng với mọi giá trị $n \in N$, ta dùng nguyên lí quy nạp toán học gồm 3 giai đoạn :

1) Kiểm chứng mệnh đề P(n) có đúng với n = 1 hay không ?

2) Giả sử mệnh đề P(n) đúng với n = k.

3) Cuối cùng ta chứng minh là mệnh đề P(n) đúng khi n = k + 1.

Nhờ nguyên lí quy nạp ta kết luận P(n) đúng với $\forall n \in N$.

B. BÀI TẬP

28 Chứng minh : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Giải

Gọi mệnh đề p hải chứng minh là P(n).

* Với n = 1, ta có : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là ta có : $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (1)

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng.

Ta cộng hai vế của (1) cho (k + 1) ta có :

$$1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (*)$$

Điều (*) chứng tỏ rằng P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lí quy nạp ta kết luận mệnh đề P(n) đúng với mọi $n \in N$.

29 Chứng minh rằng đối với mọi số nguyên dương n, ta có :

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Giải

1)• Khi n = 1, ta có : $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ đúng, vậy P(1) đúng.

• Giả sử đẳng thức đúng khi n = k (P(k) đúng), tức là :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

• Ta chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1.

Ta có : $1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2$

$= \frac{(k + 1)}{6}(2k^2 + 7k + 6) = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$

$= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6}$.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lí quy nạp, ta kết luận đẳng thức đúng với mọi $n \in N$.

2)• Khi n = 1, ta có : $1^3 = \frac{1^2(1 + 1)^2}{4}$ đúng, vậy P(1) đúng.

• Giả sử đẳng thức đúng khi n = k. (P(k) đúng), tức là :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}$$

• Khi đó : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3$

$= \frac{(k + 1)^2}{4}[k^2 + 4(k + 1)] = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lí quy nạp ta kết luận đẳng thức đúng với mọi $n \in N$.

30 Chứng minh rằng với mọi $n \in N$, ta có :

1) $-1 + 3 - 5 + ... + (-1)^n (2n - 1) = (-1)^n.n$

2) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n + 1)}{2}$.

Giải

1)• Dễ thấy đẳng thức đúng khi n = 1, vì $-1 = (-1)^1.1$

• Giả sử đẳng thức đúng với n = k, tức là ta có :

$$- 1 + 3 - 5 + ... + (-1)^k(2k - 1) = (-1)^k.k$$

• Ta chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1.

Ta có : $- 1 + 3 - 5 + ... + (-1)^k(2k - 1) + (-1)^{k+1}[2(k + 1) - 1] =$

$= (-1)^k k + (-1)^{k+1}(2k + 1) = (-1)^k k + (-1)^{k+1}.2k + (-1)^{k+1}$

$= (-1)^k k[1 + (-1)2] + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}k + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}.(k + 1)$.

Vậy đẳng thức đúng khi n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp, ta kết luận đẳng thức đúng $\forall n \in N$.

2)• Dễ thấy đẳng thức đúng khi n = 1

• Giả sử đẳng thức đúng khi n = k, tức là ta có :

$$1 - 2^2 + 3^3 + 4^2 + ... + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

• Ta chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1.

Ta có : $1 - 2^2 + 3^3 + 4^2 + ... + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 =$

$$= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$

$$= (-1)^k(k+1)\left[\frac{k}{(-1).2} + k + 1\right] = \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vậy đẳng thức đúng khi n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp, ta kết luận đẳng thức đúng với $\forall n \in N$.

31 Chứng minh : $1.4 + 2.7 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2 \quad \forall n \in N$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh.

* Khi n = 1 thì P(1) : $1.4 = 1(1+1)^2$ đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là :

$$1.4 + 2.7 + ... + k(3k+1) = k(k+1)^2 \qquad (*)$$

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng.

Ta cộng 2 vế của (*) với :

$$(k+1)[3(k+1)+1] = (k+1)(3k+4)$$

Từ (*) $\Rightarrow$ $1.4 + 2.7 + ... + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) =$

$= k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4)$

$= (k+1)[k(k+1) + 3k + 4] = (k+1)[k^2 + 4k + 4]$

$= (k+1)(k+2)^2 = (k+1)[(k+1)+1]^2$.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lí quy nạp, ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

32 Chứng minh : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh

* Khi n = 1. Ta có : $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$. Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k + 1) đúng, tức là : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ (*)

Cộng vào hai vế của (*) cho : $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Từ (*) $\Rightarrow$ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$

$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} =$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp ta kết luận P(n) đúng với mọi n $\in$ N.

33 Chứng minh : $\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + ...+ \frac{n+2}{n(n+1)2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh.

* Khi n = 1. Ta có $\frac{3}{1.2.2} = 1 - \frac{1}{(1+1).2}$ đúng $\Rightarrow$ P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là :

$$\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + ...+ \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = 1 - \frac{1}{(k+1)2^k} \quad (*)$$

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng :

Cộng vào 2 vế của (*) cho : $\frac{k+3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}}$. Ta có :

$$\frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{2.3.2^2} + ... + \frac{k+2}{k(k+1)2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{2(k+2)-k-3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} = 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2).2^{k+1}}.$$

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp ta kết luận P(n) đúng với mọi $n \in N$.

34 Chứng minh : $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh.

* Khi n = 1 ta có : $1^3 + 2 = 3$ chia hết cho 3. Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là $k^3 + 2k$ chia hết cho 3.

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng, tức là chứng minh :

$$(k + 1)^3 + 2(k + 1) \text{ chia hết cho } 3.$$

Thật vậy : $(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$$= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1).$$

Vì : $k^3 + 2k$ chia hết cho 3

và : $3(k^2 + k + 1)$ chia hết cho 3

Nên $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ chia hết cho 3. Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

35 Chứng minh : $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh

* Khi n = 1, ta có : $4^1 + 15 - 1 = 18$ chia hết cho 9. Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng tức là : $4^k + 15k - 1$. chia hết cho 9.

* Chứng minh P(k + 1) đúng tức là chứng minh :

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 \text{ chia hết cho } 9.$$

Ta có : $4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4^k.4 + 15k + 14$ (*)

Vì : $4^k + 15k - 1 = n.9$ (vì chia hết cho 9)

$\Rightarrow$ $4^k = n.9 - 15k + 1$

Do đó (*) : $4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4(n.9 - 15k + 1) + 15k + 14$

$= 9(4n - 5k + 2)$ là bội số của 9

Hay : $4^{k+1} + 15(k + 1) - 1$ chia hết cho 9.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận P(n) đúng với mọi $n \in N$.

36 Cho $a \geq -1$. Chứng minh : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (Bất đẳng thức Bernouilli).

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh.

* Khi n = 1. Ta có : $1 + a \geq 1 + a$ (đúng). Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là : $(1 + a)^k \geq 1 + ka$ (*)

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng, tức chứng minh : $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

Vì $a \geq -1 \Rightarrow 1 + a \geq 0$, nhân 2 vế của (*) cho $1 + a \geq 0$.

Ta có : $(1 + a)^k (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a)$

$\Rightarrow (1 + a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + ka^2$

$\Rightarrow (1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

37 Chứng minh rằng : $n^n \geq (n + 1)^{n-1}$ $\forall n \in N$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh

* Khi n = 1, ta có $1^1 \geq (1 + 1)^{1-1}$ đúng (vì $1 \geq 2^0 = 1$). Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là : $k^k \geq (k + 1)^{k-1}$ (*)

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng, tức là chứng minh :

$(k + 1)^{k+1} \geq (k + 2)^k$ đúng $\Leftrightarrow (k + 1)(k + 1)^k \geq (k + 2)^k$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k \geq \frac{1}{k+1} \qquad (**)$$

Mà từ (*) $\Rightarrow$ $k^k \geq \dfrac{(k+1)^k}{k+1} \Rightarrow \dfrac{1}{k+1} \leq \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k$.

Do đó, thay vì chứng minh (**). Ta chứng minh : $\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k \leq \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^k$

Tức là chứng minh : $\dfrac{k}{k+1} \leq \dfrac{k+1}{k+2} \Leftrightarrow k^2 + 2k \leq k^2 + 2k + 1$

$\Leftrightarrow 1 \geq 0$ đúng.

Do đó P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

38 Chứng minh : $(n!)^2 \geq n^n \ \forall n \in N$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh

* Khi n = 1. Ta có $1 \geq 1$ đúng. Vậy P(1) đúng.
* Giả sử P(k) đúng, tức là : $(k!)^2 \geq k^k$ (*)
* Ta chứng minh P(k + 1) đúng, tức là chứng minh :

$$[(k+1)!]^2 \geq (k+1)^{k+1} \Leftrightarrow (k!)^2(k+1)^2 \geq (k+1)^{k+1}.$$

$$\Leftrightarrow (k!)^2 \geq (k+1)^{k-1} \quad (**)$$

Nhờ (*), thay vì chứng minh (**). Ta chỉ cần chứng minh $k^k \geq (k+1)^{k-1}$ là xong.

Điều này đã chứng minh ở bài tập trên.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

39 Chứng minh : $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ chia hết cho 11, với $\forall n \in N$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh

* Khi n = 1, ta có : $6^2 + 3^3 + 3 = 66$ chia hết cho 11. Vậy P(1) đúng.
* Giả sử P(k) đúng, tức là ta có : $6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k$ chia hết cho 11 (*)
* Ta cần chứng minh P(k + 1) đúng, tức là chứng minh :

$$a = 6^{2(k+1)} + 3^{k+1+2} + 3^{k+1} \text{ chia hết cho 11}$$

Ta có : $a = 36.6^{2k} + 27.3^k + 3.3^k$.

Do (*) $\Rightarrow$ $6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = n.11$ (vì chia hết cho 11)

$\Rightarrow$ $6^{2k} = n.11 - 9.3^k - 3^k$

Nên $a = 36(11.n - 9.3^k - 3^k) + 27.3^k + 3.3^k = 36.11.n - 330.3^k$

$= 11(36n - 30.3^k)$ chia hết cho 11.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

40 Chứng minh : $n^3 + 11n$ chia hết cho 6, $\forall n \in N$.

Giải

Gọi P(n) là mệnh đề cần chứng minh

* Khi n = 1, ta có 1 + 11 = 12 chia hết cho 6. Vậy P(1) đúng.

* Giả sử P(k) đúng, tức là : $k^3 + 11k$ chia hết cho 6 (*)

* Ta chứng minh P(k + 1) đúng, tức là chứng minh $(k + 1)^3 + 11(k + 1)$ chia hết cho 6.

Ta có : $(k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 11k + 3k^2 + 3k + 12$

$= (k^3 + 11k) + 3k(k + 1) + 12$

Vì : $k^3 + 11k$ chia hết cho 6 (do *)

$3k(k + 1)$ là số chẵn nên chia hết cho 6

12 chia đúng cho 6.

Do đó : $(k + 1)^k + 11(k + 1)$ chia hết cho 6.

Vậy P(k + 1) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in N$.

Chương 2

HÀM SỐ

MIỀN XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

41 Tìm miền xác định các hàm số sau đây :

a) $y = \dfrac{x-2}{2x+5}$ **b)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

c) $y = \dfrac{x^2-4}{2x^2-x-3}$ **d)** $y = \dfrac{3x+5}{x^2+4x+6}$.

Giải

a) Hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+5}$ xác định $\Leftrightarrow$ $2x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{5}{2}$,

hay $D = R \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

b) Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$ luôn được xác định hay $D = R$.

c) Hàm số $y = \dfrac{x^2-4}{2x^2-x-3}$ xác định $\Leftrightarrow$ $2x^2 - x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

hay $D = R\setminus\{-1, \dfrac{3}{2}\}$.

d) Hàm số $y = \dfrac{3x+5}{x^2+4x+6}$ luôn được xác định vì :

$x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2 > 0$ hay $D = R$.

42 Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt[3]{2x+1}$ **b)** $y = \sqrt{1-3x}$

c) $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x|x|-4}}$ **d)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

Giải

a) Hàm số $y = \sqrt[3]{2x+1}$ được xác định với mọi x, hay $D = R$.

b) Hàm số $y = \sqrt{1-3x}$ được xác định với :

$$1 - 3x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \geq x \quad \text{hay} \quad D = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right].$$

c) Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x|x|-4}}$

- Nếu $x \geq 0$ thì $|x| = x$. Suy ra : $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

  Hàm số xác định khi $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ (vì $x \geq 0$).

- Nếu $x < 0$ thì $|x| = -x$. Suy ra : $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{-x^2-4}}$.

  Hàm số xác định khi $-x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow -x^2 > 4$ (vô lí)

  Hay $x < 0$ hàm số không được xác định.

  Tóm lại : $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x|x|-4}}$ có miền xác định là $D = (2, +\infty)$.

d) Ta có : $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-x}} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-x-x}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Do đó :

* Khi $x \geq 0$: hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-x}}$ không xác định.

* Khi $x < 0$: hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{-x-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{-2x}}$ được xác định.

Tóm lại : hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ có miền xác định là $D = (-\infty, 0)$.

43 Xác định m để hàm số sau đây xác định với mọi $x > 0$.

1) $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$ **2)** $y = \sqrt{2x-3m+4} + \dfrac{x-m}{x+m-1}$.

Giải

1) Hàm số y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x - m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m & (1) \\ x \geq \dfrac{m+1}{2} & (2) \end{cases}$

Do đó để y xác định $\forall x > 0$ thì ta phải có :

$$\begin{cases} m \le 0 & (\text{để (1) đúng } \forall x \ge 0) \\ \dfrac{m+1}{2} \le 0 & (\text{để (2) đúng } \forall x \ge 0) \end{cases} \Leftrightarrow \quad m \le -1.$$

2) Hàm số y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3m + 4 \ge 0 \\ x + m - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3m-4}{2} \\ x \ne 1 - m \end{cases}$

Vậy để y xác định khi $x > 0$, ta phải có :

$$\begin{cases} \dfrac{3m-4}{2} \le 0 \\ 1 - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{4}{3} \\ m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 1 \le m \le \frac{4}{3}.$$

44 Xác định m để hàm số sau xác định trên (–1, 0).

1) $y = \dfrac{x + 2m}{x - m + 1}$ 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - m}} + \sqrt{-x + 2m + 6}$.

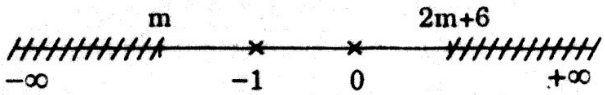
Giải

1) y xác định $\Leftrightarrow \quad x - m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow \quad x \ne m - 1$

Vậy để y xác định trên (–1, 0) thì $\begin{bmatrix} m - 1 \le -1 \\ m - 1 \ge 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{bmatrix}$.

2) y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - m > 0 \\ -x + 2m + 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ 2m + 6 \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < x \le 2m + 6$

Vậy để y xác định trên (–1, 0) ta phải có :



$$\begin{cases} m \le -1 \\ 2m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -3 < m \le -1.$$

45 Tìm miền xác định của các hàm số :

1) $y = \sqrt{7 - x} + \dfrac{1}{x - 1}$ 2) $y = \sqrt{\dfrac{x - 8}{\sqrt{x}}}$.

Giải

1) Hàm số $y = \sqrt{7 - x} + \dfrac{1}{x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \ge 0 \\ x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \ge x \\ x \ne 1 \end{cases}$

Vậy $D = (-\infty, 1) \cup (1, 7]$.

2) Hàm số $y = \sqrt{\dfrac{x-8}{\sqrt{x}}}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 8$

Vậy D = [8, +∞).

46 Tìm miền xác định của hàm số :

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$ **2)** $y = \dfrac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

Giải

1) Hàm số $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 \geq x \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$

Vậy D = [0, 4].

2) Hàm số $y = \dfrac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

Vậy D = (−1, +∞).

47 Tìm miền xác định của hàm số :

1) $y = \sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x+2}}$ **2)** $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} + \sqrt{2x-1}$

3) $y = \sqrt{x+4} - \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$ **4)** $y = \sqrt{(x+3)(x-1)} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Giải

1) $y = \sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x+2}}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 - 2\sqrt{x+2} \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+2}) - 1)^2 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2.$ Vậy D = [−2, +∞).

2) $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} + \sqrt{2x-1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} \geq 0 \\ 1 - x \neq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x < 1$

Vậy $D = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

3) $y = \sqrt{x+4} - \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x < 2.$

Vậy D = [−4, 2).

4) $y = \sqrt{(x+3)(x-1)} + \dfrac{1}{x^2-4}$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+3 \geq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

Vậy $D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty) \setminus \{2\}$.

TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số y = f(x) có miền xác định D.

Để xét tính chẵn, lẻ của hàm số y = f(x) ta thực hiện các bước :

1) CMR : D là tập đối xứng.

2) Tính f(−x)

a) Nếu f(−x) = f(x) ∀x ∈ D thì y = f(x) là hàm số chẵn

b) Nếu f(−x) = −f(x) ∀x ∈ D thì y = f(x) là hàm số lẻ.

Chú ý : *Đồ thị của hàm số chẵn nhận Oy làm trục đối xứng.*

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc O trục tọa độ làm tâm đối xứng.

48 Khảo sát tính chẵn, lẻ của các hàm số :

1) $y = 3x^2 - 5$ **3)** $y = 4x^3 - 3x$

2) $y = \sqrt{1+x}$ **4)** $y = x^4 + 3x + 5.$

Giải

1) $y = f(x) = 3x^2 - 5$ có miền xác định D = R là tập đối xứng

và $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x)$

Vậy $y = f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm số chẵn.

2) $y = f(x) = \sqrt{1+x}$ có miền xác định D = [−1, +∞) không phải là 1 tập đối xứng, nên ta không xét tính chẵn lẻ của hàm số.

3) $y = f(x) = 4x^3 - 3x$ có miền xác định D = R là tập đối xứng

và $f(-x) = 4(-x)^3 \cdot 3(-x) = -(4x^3 - 3x) = -f(x)$

Vậy : $y = f(x) = 4x^3 - 3x$ là hàm số lẻ.

4.) $y = f(x) = x^4 + 3x + 5$ có miền xác định D = R là tập đối xứng

và $f(-x) = (-x)^4 + 3(-x) + 5 = x^4 - 3x + 5$

Vì $f(-x) \neq f(x)$ và $f(-x) \neq -f(x)$

Nên hàm số $y = f(x) = x^4 + 3x + 5$ không chẵn, không lẻ.

49 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^4}$

2) $f(x) = |x|^3.x$

3) $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$

4) $f(x) = \dfrac{|x + 1| + |x - 1|}{|x + 1| - |x - 1|}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq -1 \\ 0, & -1 < x < 1. \\ x^3 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Giải

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^4}$ có miền xác định $D = R \setminus \{0\}$ là tập đối xứng.

Ta có : $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 4}{(-x)^4} = \dfrac{x^2 + 4}{x^4} = f(x), \forall x, -x \in D \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

2) $f(x) = |x|^3.x$ có miền xác định D = R là tập đối xứng.

Ta có : $f(-x) = |-x|^3.(-x) = -|x|^3.x = -f(x), \forall x, -x \in D \Rightarrow$ f(x) : lẻ.

3) $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$ có miền xác định D = R là tập đối xứng.

Ta có : $f(-x) = |2(-x) + 1| + |2(-x) - 1| = |-2x + 1| + |-2x - 1|$

$= |-(2x - 1)| + |-(2x + 1)| = |2x - 1| + |2x + 1|$

$= f(x), \forall x, -x \in D$

Vậy f(x) là hàm số chẵn.

4) $f(x) = \dfrac{|+x + 1| + |+x - 1|}{|+x + 1| - |+x - 1|}$ có miền xác định $D = R \setminus \{0\}$ là tập đối xứng.

Xét $f(-x) = \dfrac{|-x + 1| + |-x - 1|}{|-x + 1| - |-x - 1|} = \dfrac{|-(x - 1)| + |-(x + 1)|}{|-(x - 1)| - |-(x + 1)|} =$

$f(-x) = \dfrac{|x - 1| + |x + 1|}{|x - 1| - |x + 1|} = -\dfrac{|x + 1| + |x - 1|}{|x + 1| - |x - 1|} = -f(x) \quad \forall x, -x \in D.$

Vậy f(x) : lẻ.

5)• Với $x \le -1 \Rightarrow D = (-\infty, -1]$ là miền xác định của hàm số : không đối xứng nên ta không xét chẵn lẻ.

• Với $x \ge 1 \Rightarrow D = [1, +\infty)$: không đối xứng nên ta không xét chẵn, lẻ.

• $-1 < x < 1 \Rightarrow D\ (-1, 1)$: tập đối xứng

$\forall x, -x \in D : f(x) = 0$ và $f(-x) = 0$

Vậy $f(x) = 0 = \pm f(-x)$: vừa chẵn, vừa lẻ.

50 Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số sau :

a) $y = |x + 2| - |x - 2|$ **b)** $y = |2x + 1| + |2x - 1|$

c) $y = (x - 1)^2$ **d)** $y = x^2 + x$.

Giải

a) $y = f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ có tập xác định là R đối xứng.

Ta có : $f(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = -f(x)$.

Vậy : $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ là hàm số lẻ

b) $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$ có tập xác định là R đối xứng

Ta có : $f(-x) = |2(-x) + 1| + |2(-x) - 1| = |2x - 1| + |2x + 1| = f(x)$

Vậy : $f(x) = (2x + 2) + (2x - 1)$: là hàm số chẵn.

c) $f(x) = (x - 1)^2$ có tập xác định là R : đối xứng

Ta có : $f(1) = 0, f(-1) = 4$

Nên $f(-1) \ne f(1)$: do đó $f(x)$ không phải là hàm số chẵn.

$f(-1) \ne -f(1)$: do đó $f(x)$ không phải là hàm số lẻ.

d) $f(x) = x^2 + x$: có tập xác định là R, đối xứng.

Ta có : $f(1) = 2, f(-1) = 0$.

Tương tự bài c). Ta kết luận $f(x)$ không chẵn không lẻ.

TÍNH TĂNG GIẢM (ĐƠN ĐIỆU) CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• *$f(x)$ tăng trên (a, b)*

Khi $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *và* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

• *$f(x)$ giảm trên (a, b)*

Khi $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ *và* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- $y = f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$: *tăng khi* $a > 0$, *giảm khi* $a < 0$
- $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

  * *Với* $a > 0$ *thì trên* $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$: *hàm giảm*

    trên $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$: *hàm tăng.*

  * *Với* $a < 0$ *thì trên* $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$: *hàm tăng*

    trên $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$: *hàm giảm.*

B. BÀI TẬP

51 Dùng định nghĩa để tìm khoảng tăng giảm của hàm số :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

Giải

MXD : D = R.

$\forall x_1, x_2 \in R$ và $x_1 < x_2$. Ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^2 + 4x_1 - 1) - (-x_2^2 + 4x_2 - 1)$$

$$= (x_2^2 - x_1^2) + 4(x_1 - x_2) = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 4)$$

* Vì $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 < 2x_2 - 4 = 2(x_2 - 2) < 0$ khi $x_2 < 2$.

Vậy $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 4) < 0$ khi $x < 2$.

Do đó hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x - 1$ giảm trên $(-\infty, 2)$.

* Vì $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 > 2x_1 - 4 = 2(x_1 - 2) > 0$ khi $x_1 > 2$.

Do đó hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x - 1$ tăng trên $(2, +\infty)$.

52 Dùng định nghĩa để tìm khoảng tăng giảm của hàm số : $y = \frac{x+1}{x-3}$.

Giải

Miền xác định là $D = R \setminus \{3\}$.

$\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 < x_2$. Ta xét : $f(x_1) - f(x_2) = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}$.

* Khi $x_1 < x_2 < 3 \Rightarrow$ $(x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0$, và $x_2 - x_1 > 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) - f(x_2) = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Kết luận : f(x) giảm trên $(-\infty, 3)$.

* Khi $3 < x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0$ và $x_2 - x_1 > 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) - f(x_2) = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Kết luận : f(x) giảm trên $(3, +\infty)$.

* Tóm lại : f(x) luôn luôn giảm trên từng khoảng xác định của nó.

53 Dùng định nghĩa, tìm khoảng tăng giảm của hàm số : $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$.

Giải

Miền xác định của hàm số là D = R.

$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1^2 + 1} - \frac{3}{x^2 + 1} = \frac{3(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{3(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$$

* Khi $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0$ và $x_1 - x_2 > 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) - f(x_2) = \frac{3(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} < 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm f(x) tăng dần trên $(-\infty, 0)$.

* Khi $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0$ và $x_2 - x_1 > 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) - f(x_2) = \frac{3(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Vậy hàm f(x) giảm trên $(0, +\infty)$.

54 Dùng định nghĩa để tìm khoảng tăng giảm của hàm số sau :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Giải

Miền xác định D = R.

$\forall\ x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$. Ta xét : $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3} - \sqrt{x_2^2 + 3}$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\left(\sqrt{x_1^2 + 3} - \sqrt{x_2^2 + 3}\right)\left(\sqrt{x_1^2 + 3} + \sqrt{x_2^2 + 3}\right)}{\sqrt{x_1^2 + 3} - \sqrt{x_2^2 + 3}}$$

$$= \frac{x_1^2 + 3 - x_2^2 - 3}{\sqrt{x_1^2 + 3} + \sqrt{x_2^2 + 3}} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 3}\sqrt{x_2^2 + 3}}.$$

* Khi $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow (x_1 - x_2) < 0, (x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x)$ giảm trên $[-\infty, 0)$.

* Khi $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2) < 0, x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$.

55 Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số : $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ tăng trên mỗi khoảng xác định của nó.

Giải

Miền xác định của hàm số $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

* $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1 + 1}{x_1 + 1} - \frac{2x_2 + 1}{x_2 + 1} = \frac{(2x_1 + 1)(x_2 + 1) - (2x_2 + 1)(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0 \quad \text{vì } x_1 - x_2 < 0, \text{ mẫu} > 0.$$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(-\infty, -1)$.

* $\forall x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$, $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0, \quad \text{vì } x_1 - x_2 < 0, \text{ mẫu} > 0.$$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(-1, +\infty)$.

Tóm lại : hàm số tăng trên mỗi khoảng xác định của nó.

56 Khảo sát tính đơn điệu (tăng, giảm) của các hàm số.

1) $y = f(x) = 2x + 3$ **2)** $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

3) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ **4)** $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Giải

1) Hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ có miền xác định $D = R$.

Giả sử $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + 3 - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy $f(x) = 2x + 3$ là tăng trên R.

2) Hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ có miền xác định $D = R$.

Giả sử $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tăng trên R.

3) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ có miền xác định $D = R\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

* Giả sử $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Vậy hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ giảm trên $(-\infty, 0)$.

* Giả sử $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Vậy hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ giảm trên R.

4) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ có miền xác định $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

* Giả sử $x_1, x_2 \in 0\ (-\infty, 0)$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ tăng trên $(-\infty, 0)$.

* Giả sử $x_1, x_2 \in 0\ (0, +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta xét :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Vậy hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ giảm trên $(0, +\infty)$.

57 Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$.

1) Xét tính đơn điệu của hàm số. **2)** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

Giải

1) Xét tính đơn điệu :

Hàm số $y = f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$ có miền xác định $D = [-2, 2]$.

* Giả sử $x_1, x_2 \in [-2, 0]$ và $-2 \le x_1 < x_2 \le 0$

Ta có : $x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \ge 0$.

Vậy : $12 - 3x_1^2 < 12 - 3x_2^2 \Rightarrow \sqrt{12 - 3x_1^2} < \sqrt{12 - 3x_2^2}$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số $y = f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$ tăng trên $[-2, 0]$.

* Giả sử $x_1, x_2 \in [0, 2]$ và $0 \le x_1 < x_2 \le 2$.

Ta có : $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$.

Vậy : $12 - 3x_1^2 > 12 - 3x_2^2 \Rightarrow \sqrt{12 - 3x_1^2} > \sqrt{12 - 3x_2^2}$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số giảm trên $[0, 2]$.

2) Xét tính chẵn, lẽ của hàm số :

Miền xác định $D = [-2, 2]$ là một tập hợp đối xứng.

Ta lấy $x, -x \in D$. Ta có : $f(-x) = \sqrt{12 - 3(-x)^2} = \sqrt{12 - 3x^2} = f(x)$

Vậy hàm số $y = f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$ là hàm số chẵn.

58 Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên các khoảng đã chỉ ra :

1) $y = x^2 + 4x - 2$ trên $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$.

2) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

3) $y = \dfrac{4}{x+1}$ trên $(-1, +\infty)$. **4)** $y = \dfrac{3}{2-x}$ trên $(2, +\infty)$.

Giải

1) $y = f(x) = x^2 + 4x - 2$

• $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$, $x_1 < x_2$. Ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) > 0.$$

• Vì $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 + 4 < 0$ vì $x_1 < x_2 < -2$.

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ f(x) giảm (nghịch biến) trên $(-\infty, -2)$.

• $\forall x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$, $x_1 < x_2$. Ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) < 0.$$

Vì $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 + 4 > 0$.

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ f(x) tăng (đồng biến) trên $(-2, +\infty)$.

2) Tương tự bài 1 : Ta có : Hàm số tăng trên $(-\infty, 1)$, giảm trên $(1, +\infty)$.

3) $y = f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

$\forall x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{x_1 + 1} - \frac{4}{x_2 + 2} = \frac{4(x_2 + 1 - x_1 - 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0.$$

$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow$ f(x) nghịch biến $(-1, +\infty)$.

4) $y = f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

$\forall x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{2 - x_1} - \frac{3}{2 - x_2} = \frac{3[2 - x_2 - 2 + x_1]}{(2 - x_1)(2 - x_2)} < 0 .$$

$\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$: hàm số đồng biến trên $(2, +\infty)$.

MỘT SỐ HÀM SỐ ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hàm số y = ax + b

• *Miền xác định : D = R*

• *a = 0 $\Rightarrow$ y = b : đó là hàm hằng số, có đồ thị là 1 đường thẳng cùng phương với trục Ox, cắt Oy tại một điểm có tung độ bằng b.*

y = ax + b là hàm số tăng nếu a > 0

y = ax + b là hàm số giảm nếu a < 0.

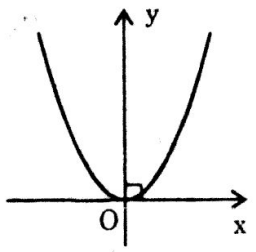
2. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bc + c$ $(a \neq 0)$

• *Miền xác định : D = R*

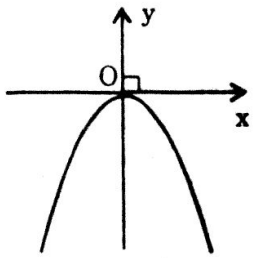
a) Hàm số $y = ax^2$

+ *Miền xác định : D = R.*
+ *Hàm số $y = f(x) = ax^2$ là hàm số chẵn.*
+ *Nếu a > 0, hàm số giảm trên $(-\infty, 0)$, tăng trên $(0, +\infty)$.*

  Nếu a < 0, hàm số tăng trên $(-\infty, 0)$, giảm trên $(0, +\infty)$.
+ *Đồ thị là 1 parabol có đỉnh là gốc tọa độ O và nhận trục Oy làm trục đối xứng.*



$y = ax^2$, $a > 0$

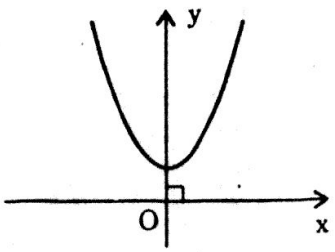


$y = ax^2$, $a < 0$

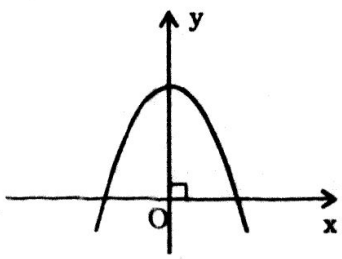
b) Hàm số $y = ax^2 + c$ $(a \neq 0)$

+ *Miền xác định : D = R.*
+ *$y = ax^2 + c$ là 1 hàm số chẵn.*
+ *Nếu a > 0 hàm số giảm dần trên $(-\infty, 0)$, tăng trên $(0, +\infty)$.*

  Nếu a < 0, hàm số tăng trên $(-\infty, 0)$, giảm trên $(0, +\infty)$.



$y = ax^2 + c$ $(a > 0, c > 0)$



$y = ax^2 + c$, $(a < 0, c > 0)$

c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$

+ *Miền xác định D = R*
+ *Ta có thể viết* $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. *Nên :*

  Nếu a > 0, hàm số giảm trong $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$, *tăng trong* $\left(-\dfrac{b}{2a} + \infty\right)$.

  Nếu a < 0, hàm số tăng trong $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ *và giảm trong* $\left(-\dfrac{b}{2a} + \infty\right)$.

+ *Bảng biến thiên :*

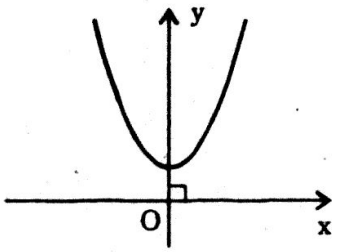
$a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

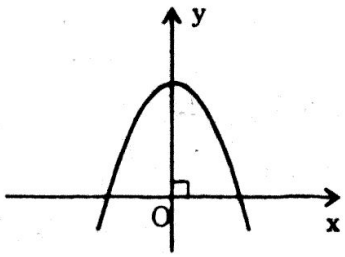
$a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

+ *Đồ thị là parabol có đỉnh* $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.



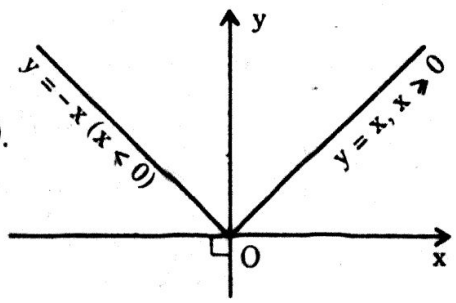
$y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$



$y = ax^2 + bx + c\ (a < 0)$

3. Hàm số $y = |x|$

- *Miền xác định : $D = R$.*
- *Hàm số $y = |x|$ là hàm số chẵn.*
- *Hàm số giảm trong $(-\infty, 0)$, tăng trong $(0, +\infty)$.*
- *Ta có :* $y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$



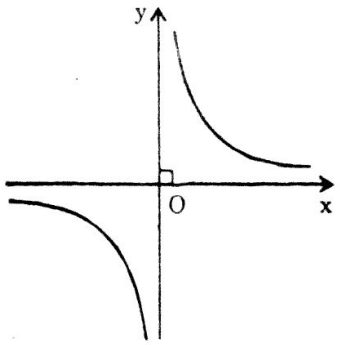
Nên đồ thị gồm 2 nửa đường thẳng như hình vẽ.

4. Hàm số $y = \frac{a}{x}$

a) Hàm số $y = \frac{1}{x}$

- *Miền xác định $D = R\setminus\{0\}$.*
- *Hàm số $y = \frac{1}{x}$ là hàm số lẻ.*
- *Hàm số giảm trên từng khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$.*

- *Đồ thị là 1 hyperbol vuông góc.*



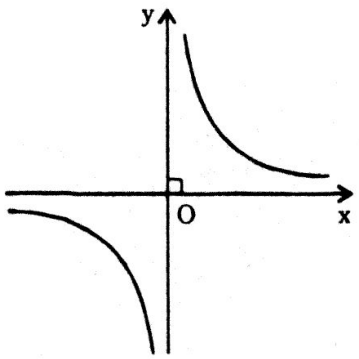
b) Hàm số $y = \frac{a}{x}$

- *Miền xác định : $D = R \setminus \{0\}$.*
- *$y = \frac{a}{x}$ là hàm số lẻ.*
- *$a > 0$ hàm số giảm trên từng khoảng $(-\infty, 0)$ và $0, +\infty)$.*

  $a < 0$ hàm số tăng trên từng khoảng $-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$.
- *Bảng biến thiên và đồ thị :*

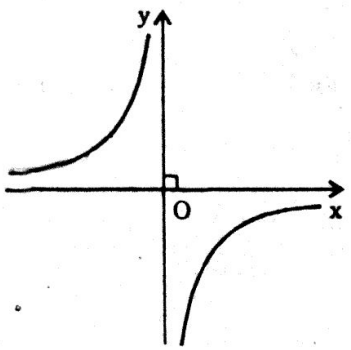
$a > 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0



$a < 0$:

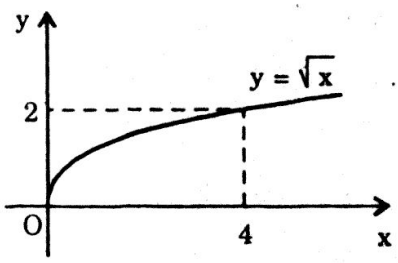
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0



5. Hàm số $y = \sqrt{x}$

- *Miền xác định $D = [0, +\infty)$.*
- *Hàm số tăng trên D.*
- *Bảng biến thiên và đồ thị :*

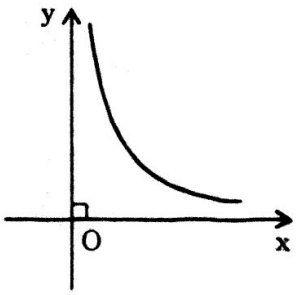
x	0		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



6. Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

- *Miền xác định $D = (0, +\infty)$.*
- *Hàm số giảm trên D.*
- *Bảng biến thiên, đồ thị :*

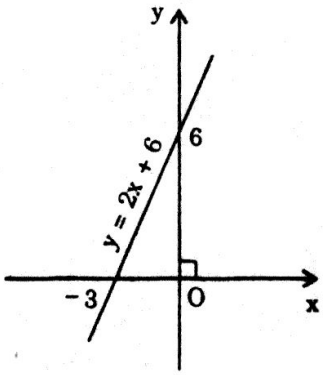
x	0		$+\infty$
y	▮	$+\infty$ ↘	0

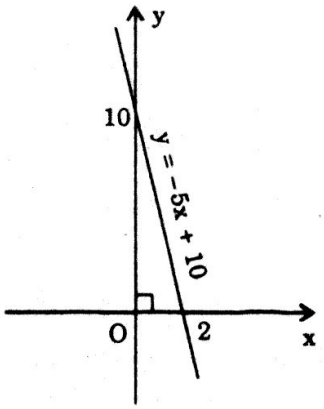


59 Vẽ các đồ thị của các hàm số sau :

1) $y = 2x + 6$ **2)** $y = -5x + 10$.

Giải





Bảng giá trị :

x	0	-3
$y = 2x + 6$	6	0

x	0	2
$y = -5x + 10$	10	0

60 Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng :

1) $y = 3x - 2$ và $x = \frac{5}{4}$ **2)** $y = -3x + 2$ và $y = 4(x - 3)$.

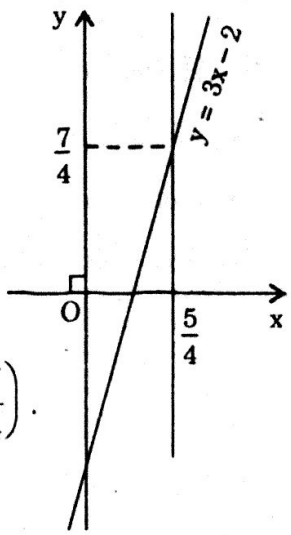
Giải

1) Thế $x = \frac{5}{4}$ vào $y = 3x - 2$.

Ta có :

$$y = 3\left(\frac{5}{4}\right) - 2 = \frac{15}{4} - 2 = \frac{7}{4}$$

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng này là $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$.



2) Tọa độ giao điểm của hai đường :

$y = -3x + 2,$

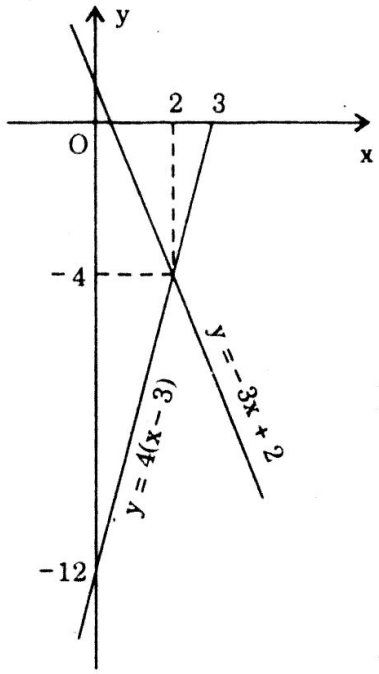
$y = 4(x - 3)$

là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 4x - 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 2 \\ -3x + 2 = 4x - 12 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (2, –4)



61 Tìm a để ba đường thẳng sau đây đồng quy :

$y = 2x, \quad y = -x - 3, \quad y = ax + 5.$

Giải

- Trước hết tìm giao điểm của $y = 2x$ và $y = -x - 3$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A(-1, -2)$$

- Để 3 đường thẳng cho đồng quy tức là đường thẳng $y = ax + 5$ đi qua

$$A(-1, -2) \quad \Rightarrow \quad -2 = -a + 5 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

Vậy giá trị a cần tìm là $a = 7$.

62 Xác định a và b sao cho đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

1) Đi qua 2 điểm (–1, –20) và (3, 8).

2) Đi qua điểm (4, –3) và song song với đường thẳng : $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

Giải

1) Vì đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $(-1, -20) \Rightarrow \quad -20 = -a + b$

$(3, 8) \Rightarrow \quad 8 = 3a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -13 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 7x - 13$$

2) Vì đường thẳng $y = ax + b$ song song với $y = -\frac{2}{3}x + 1$ nên ta có $a = -\frac{2}{3}$.

Vậy : $y = -\frac{2}{3}x + b$

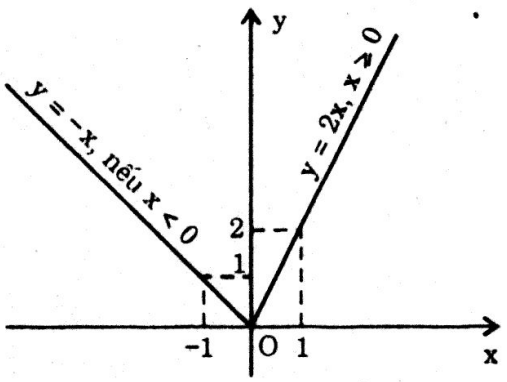
Vì nó đi qua A(4, –3) nên : $-3 = -\frac{2}{3}.4 + b \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

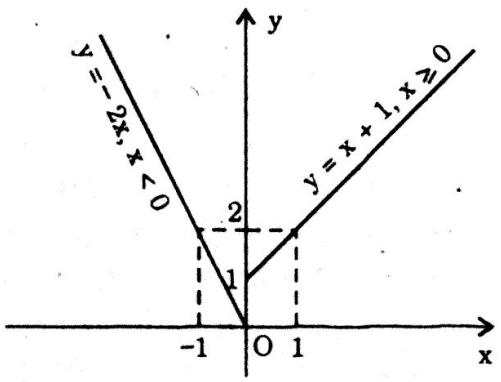
63 Vẽ đồ thị các hàm số sau : **1)** $y = f(x) = \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$ (H_1).

2) $y = f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$ (H_2).

Giải



(H_1)



(H_2)

64 Tìm Parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó :

1) Đi qua hai điểm M(1, 5) và N(–2, 8).

2) Đi qua điểm A(3, –4) và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{2}$.

3) Có đỉnh S(2, –2).

Giải

1) Vì Parabol đi qua M(1, 5) nên ta có : $5 = a + b + 2$

Vì parabol đi qua (–2, 8) nên ta có : $8 = 4a - 2b + 2$

Giải hệ phương trình trên ta có : $a = 2, b = 1$

Vậy phương trình của parabol là : $y = 2x^2 + x + 2$.

2) (P) qua A(3, –4) nên ta có : $9a + 3b + 2 = -4$

(P) có trục đối xứng $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3a$

Giải hệ trên ta có $a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -1$.

$$(P) : y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2.$$

3) (P) có đỉnh S(2, –2) nên : $4a + 2b + 2 = -2$

(P) có trục đối xứng $x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$

Giải hệ trên ta có : $a = 1, b = -4$

$$(P) : y = x^2 - 4x + 2.$$

65 Tìm parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó :

1) Đi qua điểm A(8, 0) và có đỉnh S(6, –12).

2) $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đồ thị đi qua A(0, 6).

Giải

1) (P) qua A(8, 0), S(6, –12) nên ta có :

$$\begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ -\frac{b}{2a} = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -36, c = 96.$$

Vậy $(P) : y = 3x^2 - 36x + 96$

2) Ta có : $S\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\Delta}{4a}\right)$ nên hàm số đạt cực tiểu bằng :

$$-\frac{\Delta}{4a} \text{ tại } x = -\frac{b}{2a} \quad (a \neq 0).$$

Nên ta có : $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 & (1) \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 & (2) \end{cases}$

Mặt khác vì (P) đi qua A(0, 6) : $6 = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow c = 6$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2, c = 6.$

Vậy $(P) : y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$

66 Tìm parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng :

1) (P) đi qua A(0, –1); B(1, –1); C(–1, 1).

2) (P) đi qua D(3, 0) và có đỉnh S(1, 4).

Giải

1) Vì (P) đi qua A(0, −1), B(1, −1), C(−1, 1) nên ta có :

$$\left\{\begin{array}{l} -1 = a.0 + b.0 + c \\ -1 = a + b + c \\ 1 = a - b + c \end{array}\right. \Rightarrow \quad a = 1, b = -1, c = -1 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - x - 1$$

2. Vì (P) qua D(3, 0) và S(1, 4) nên ta có :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = 9a + 3b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ -\dfrac{(b^2 - 4ac)}{4a} = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \quad y = -x^2 + 2x + 3.$$

67 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :

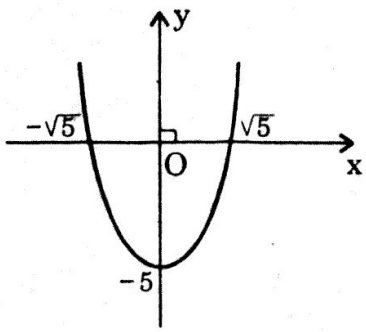
1) $y = x^2 - 5$ 2) $y = -x^2 + 4$.

Giải

1) $y = x^2 - 5$

- TXĐ : D = R.
- $y = x^2 - 5$ là hàm số chẵn.
- Bảng biến thiên :

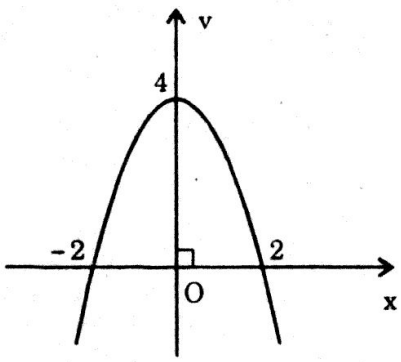
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	−5	↗	$+\infty$



2) $y = -x^2 + 4$

- TXĐ : D = R.
- $y = -x^2 + 4$ là hàm số chẵn.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$



68 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

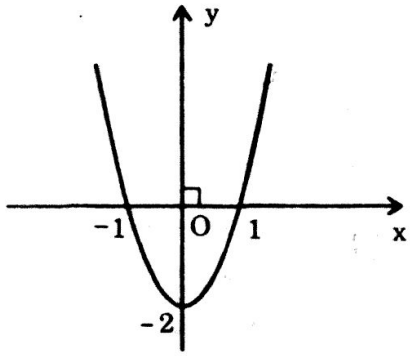
1) $y = 2x^2 - 2$ 2) $y = -3x^2 + 9$.

Giải

1) $y = 2x^2 - 2$

- TXĐ : D = R.
- Hàm số $y = 2x^2 - 2$: chẵn.
- Bảng biến thiên :

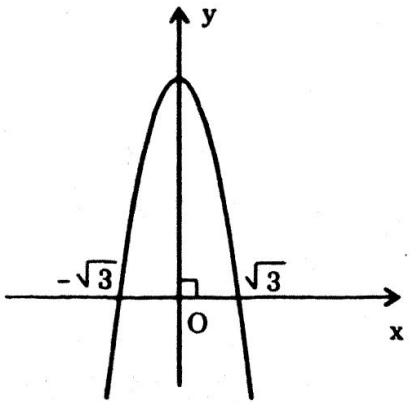
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$



2) $y = -3x^2 + 9$

- TXĐ : D = R.
- Hàm số $y = -3x^2 + 9$: chẵn.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	9	↘	$-\infty$



69 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số :

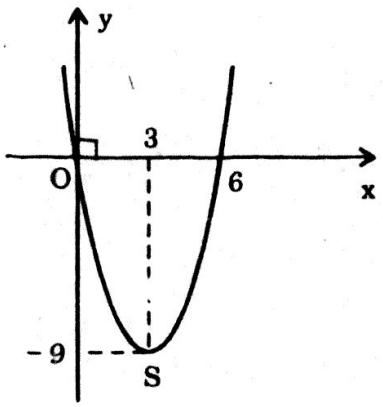
1) $y = x^2 - 6x$ **2)** $y = -x^2 + 4x$.

Giải

1) $y = x^2 - 6x$

- TXĐ : D = R.
- Hàm số $y = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 9$
- Bảng biến thiên :

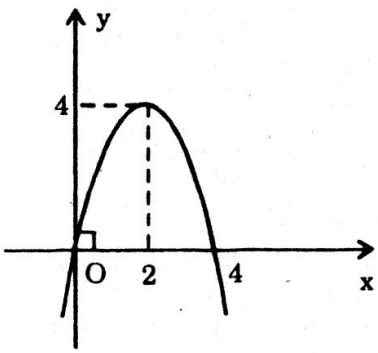
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-9	↗	$+\infty$



2) $y = -x^2 + 4x$

- TXĐ : D = R.
- $y = -x^2 + 4x - 4 + 4 = -(x - 2)^2 + 4$
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

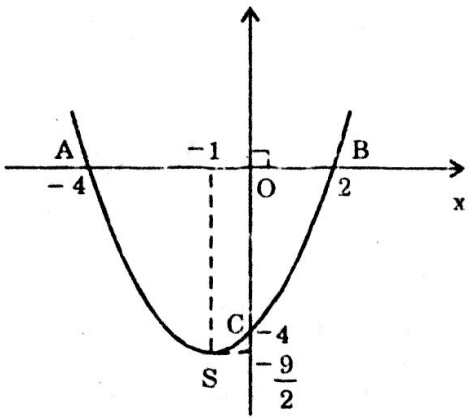


70 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số :

1) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$ 2) $y = \frac{x^2}{2} + x + 6$.

Giải

1) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$



- TXĐ : D = R.
- $y = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{9}{2}$
- Bảng biến thiên :

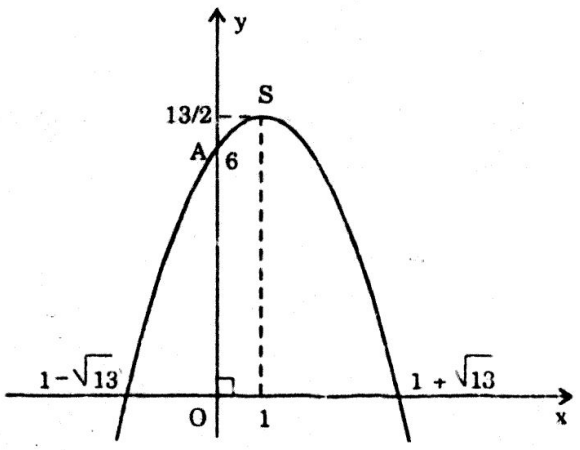
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

- Các điểm đặc biệt : Đỉnh $S\left(-1,-\frac{9}{2}\right)$.

Parabol cắt Ox tại A(−4, 0); B(2, 0).

Parabol cắt Oy tại C(0, −4).

2) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 6$



- TXĐ : D = R.
- $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{2}$
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{13}{2}$	↘	$-\infty$

Đỉnh $S\left(1,\frac{13}{2}\right)$. Parabol cắt Oy tại A(0, 6).

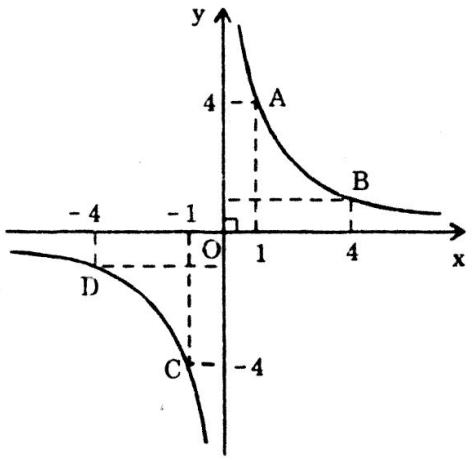
Parabol cắt Ox tại $B\left(\frac{+\sqrt{13}-1}{-1},0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{13}+1}{+1},0\right)$.

71 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau :

1) $y = \frac{4}{x}$ **2)** $y = -\frac{2}{x}$ **3)** $y = \frac{1}{3x}$ **4)** $y = \frac{-7}{2x}$.

Giải

1) $y = \frac{4}{x}$

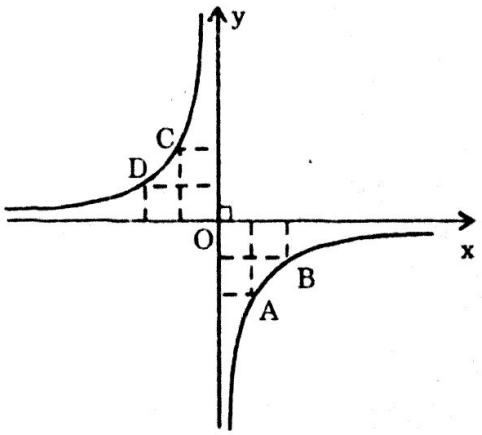


- TXĐ : D = R\{0}.
- $y = \frac{4}{x}$ là hàm số lẻ.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	↘	‖	↘	0
			$-\infty$		$+\infty$

- Điểm thuộc đồ thị :A(1, 4), B(4, 1), C(–1, –4), D(–4, –1).

2) $y = -\frac{2}{x}$

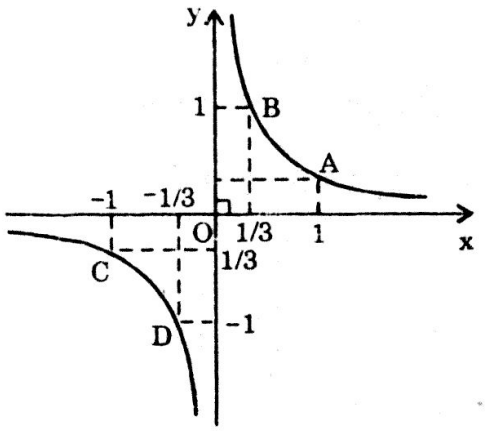


- TXĐ : D = R\{0}.
- $y = \frac{-2}{x}$: lẻ
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	↗	‖	↗	0
			$+\infty$		$-\infty$

- Một số điểm thuộc đồ thị : A(1, –2); B(2, –1); C(–1, 2); D(–2, 1).

3) Hàm số $y = \frac{1}{3x}$



- TXĐ : D = R\{0}.
- y là hàm số lẻ.
- Bảng biến thiên :

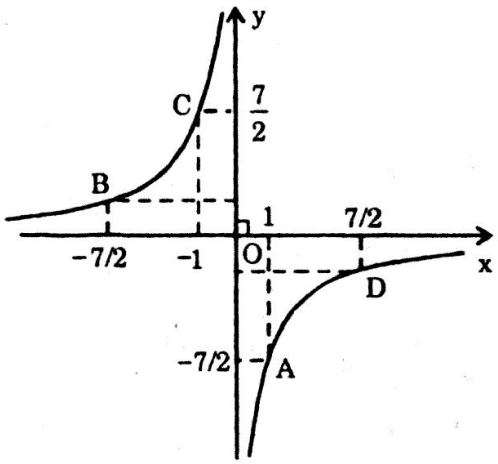
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	↘	‖	↘	0
			$-\infty$		$+\infty$

- Một số điểm của đồ thị : $A\left(1,\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3},1\right)$; $C\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-\frac{1}{3},-1\right)$.

4) $y = \frac{-7}{2x}$

- TXĐ : $D = R \setminus \{0\}$.
- Hàm số $y = \frac{-7}{2x}$: lẻ.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	↗ $+\infty$	|| $-\infty$	↗	0



- Một số điểm của đồ thị : $A\left(1,\frac{-7}{2}\right)$; $B\left(\frac{-7}{2},1\right)$; $C\left(-1,\frac{7}{2}\right)$; $D\left(\frac{7}{2},-1\right)$.

72 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số :

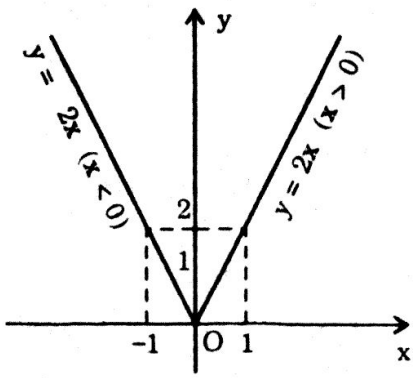
1) $y = 2|x|$ **2)** $y = 3\sqrt{x}$.

Giải

1) $y = 2|x|$

- TXĐ : $D = R$.
- $y = 2|x|$: chẵn.
- $y = 2|x| = \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$
- Bảng biến thiên :

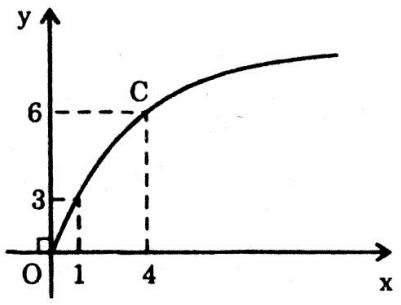
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



2) $y = 3\sqrt{x}$

- TXĐ : $D = [0, +\infty]$.
- Bảng biến thiên :

x	0		$+\infty$
y	0	↗	$+\infty$



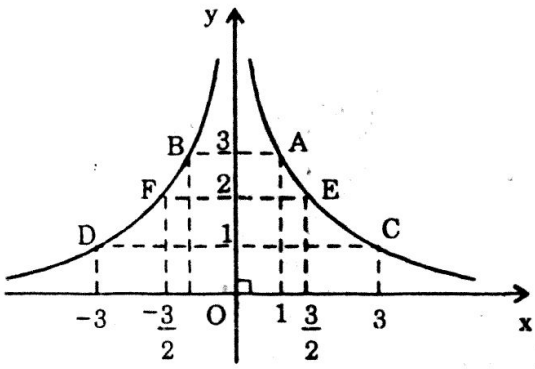
- Điểm đặc biệt : O(0, 0), B(1, 3), C(4, 6).

73 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

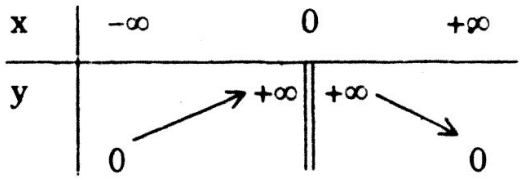
1) $y = \dfrac{3}{|x|}$ **2)** $y = \dfrac{-2}{\sqrt{x}}$.

Giải

1) $y = \dfrac{3}{|x|}$



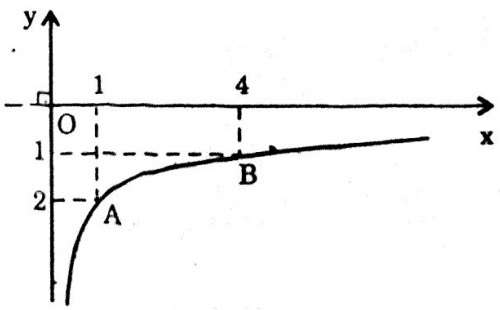
- TXĐ : $D = R\setminus\{0\}$.
- $y = \dfrac{3}{|x|}$ là hàm số chẵn.
- Bảng biến thiên :



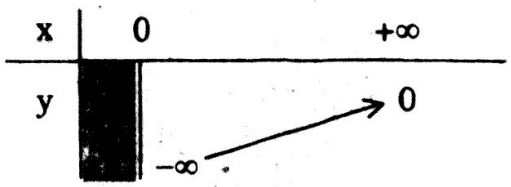
- Một số điểm đặc biệt :

$$A(1, 3),\ B(-1, 3),\ C(3, 1),\ D(-3, 1),\ E\left(\frac{3}{2}, 2\right),\ F\left(-\frac{3}{2}, 2\right).$$

2) $y = \dfrac{-2}{\sqrt{x}}$



- TXĐ : $D = (0, +\infty)$
- Bảng biến thiên :

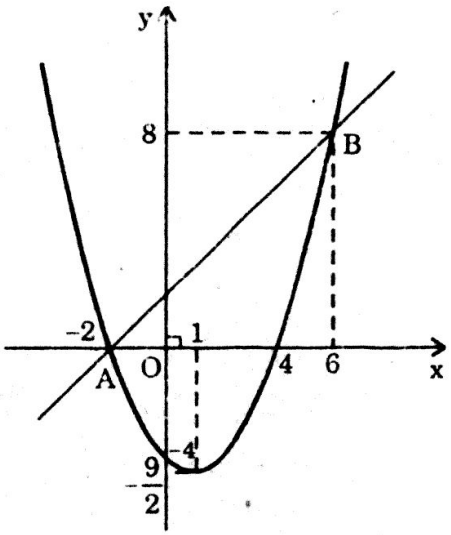


- Một số điểm đặc biệt : A(1, −2); B(4, −1).

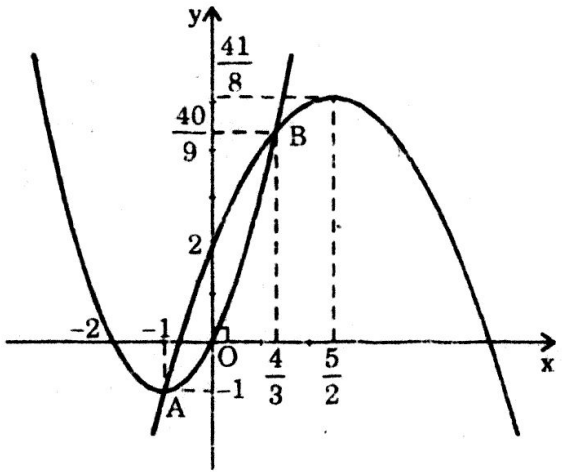
74 Vẽ các đồ thị của các hàm số sau trên cùng 1 hệ trục tọa độ và tìm tọa độ các giao điểm của chúng.

1) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \dfrac{x^2}{2} - x - 4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{5}{2}x + 2 \end{cases}$

Giải



Ta thấy 2 giao điểm là A(–2, 0), B(6, 8).

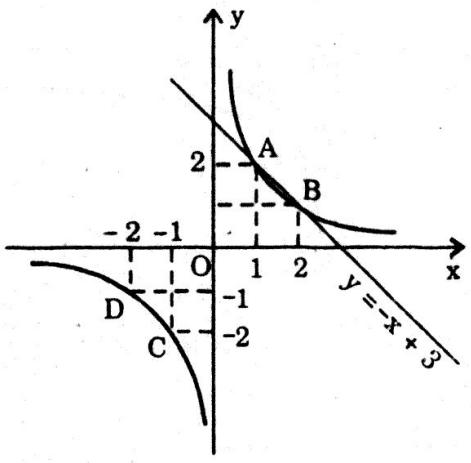


2 giao điểm là A(–1, 1), $B\left(\frac{4}{3}, \frac{40}{9}\right)$.

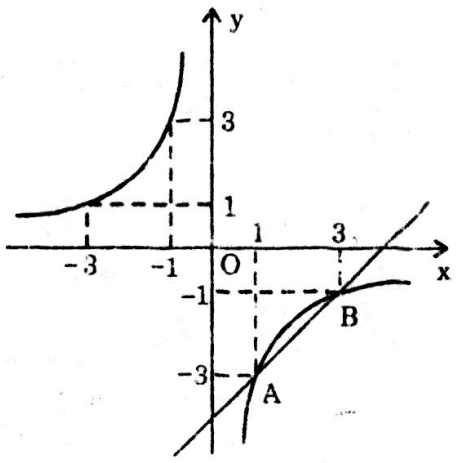
75 Vẽ đồ thị các hàm số sau đây trên cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ các giao điểm của chúng.

1) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = -x + 3 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y = \dfrac{-3}{x} \\ y = x - 4 \end{cases}$

Giải



Hai giao điểm là A(1, 2); B(2, 1)



Hai giao điểm là A(1, –3); B(3, –1).

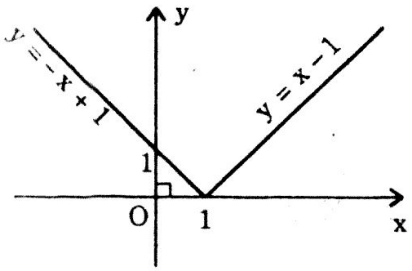
76 Vẽ đồ thị các hàm số :

1) $y = |x - 1|$ **2)** $y = -|x + 2|$ **3)** $y = x + |x|$.

Giải

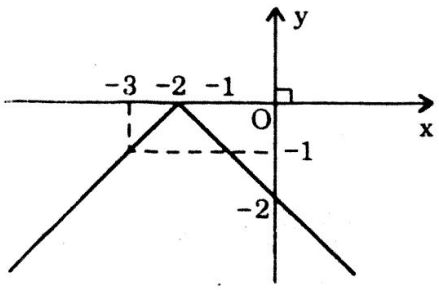
1) $y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ nếu } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$

Đồ thị là một đường tạo bởi 2 tia có gốc A(1, 0).



2) $y = -|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 \text{ nếu } x \geq -2 \\ x + 2 \text{ nếu } x < -2 \end{cases}$

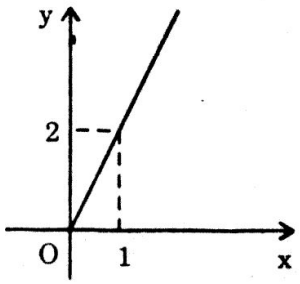
Đồ thị là một đường tạo bởi 2 tia có gốc B(–2, 0).



3) $y = x + |x|$

$= \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq -0 \\ 0 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị là phần đường thẳng $y = 2x$ có $x \geq 0$.



Ví dụ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

1) $y = -\frac{1}{2}x^3$. **2)** $y = \sqrt{4 - x}$.

Giải

1) Khảo sát hàm số $y = -\frac{1}{2}x^3$.

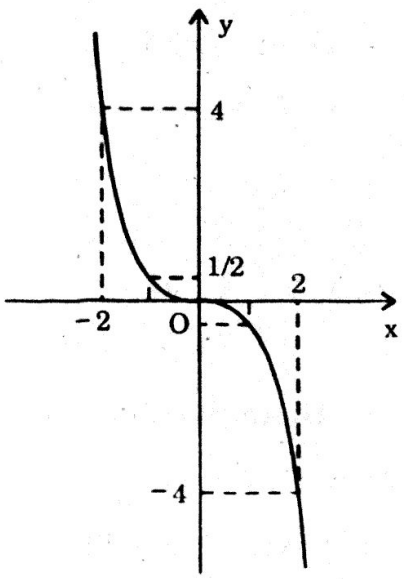
- Tập xác định D = R.
- Sự biến thiên : với $x_1 \neq x_2$.

Ta có : $t = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) < 0$.

Do đó hàm số giảm trên R.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$



- $f(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^3 = \frac{1}{2}x^3 = -f(x)$: hàm số lẻ, nên đồ thị hàm số nhận gốc

O làm tâm đối xứng.

- Điểm đặc biệt : $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, (2, –4) ...

2) Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{4 - x}$.

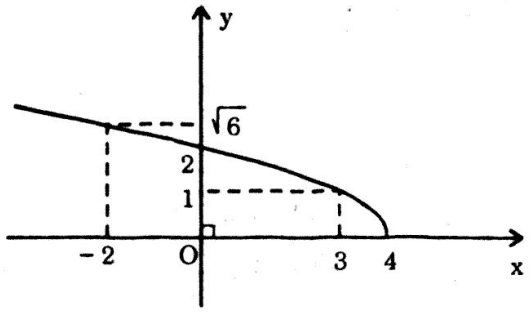
- TXĐ : D = $(-\infty, 4]$.
- Sự biến thiên $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 4]$ và $x_1 \neq x_2$.

Ta có : $t = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{4 - x_2} - \sqrt{4 - x_1}}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{\sqrt{4 - x_2} + \sqrt{4 - x_1}} < 0.$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 4)$.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0		



- Điểm đặc biệt và đồ thị : A(0, 2), (3, 1), (4, 0), $(-2, \sqrt{6})$.

78 Xác định tính chẵn lẻ và vẽ đồ thị các hàm số

1) $y = |x + 1| + |x - 1|$ **2)** $y = |+x + 1| - |x - 1|$

3) $y = x|x|$ **4)** $y = x^2 - 2|x| + 1$.

Giải

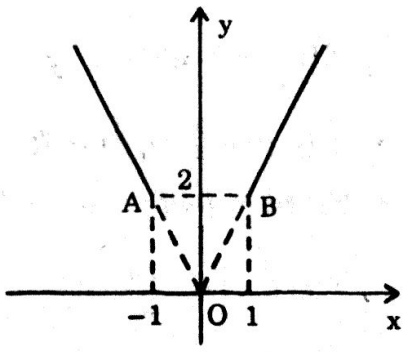
1) $y = |x + 1| + |x - 1|$

- Hàm số chẵn vì : D = R

và $f(-x) = |-x + 1| + |-x - 1|$

$= |x + 1| + |x - 1| = f(x)$

- $y = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x < -1 \\ 2 \text{ nếu } -1 \le x \le 1 \\ 2x \text{ nếu } x \ge 1 \end{cases}$



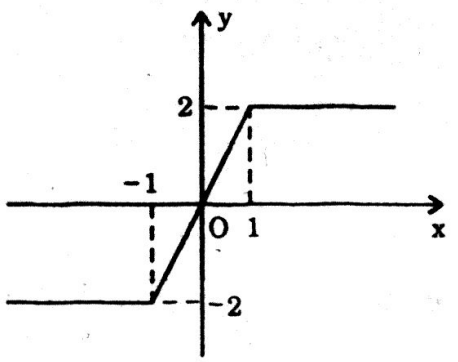
- Điểm đặc biệt : A(–1, 2); B(1, 2).

2) $y = |x + 1| - |x - 1|$ là hàm số lẻ vì :

$f(-x) = |-x + 1| - |-x - 1|$

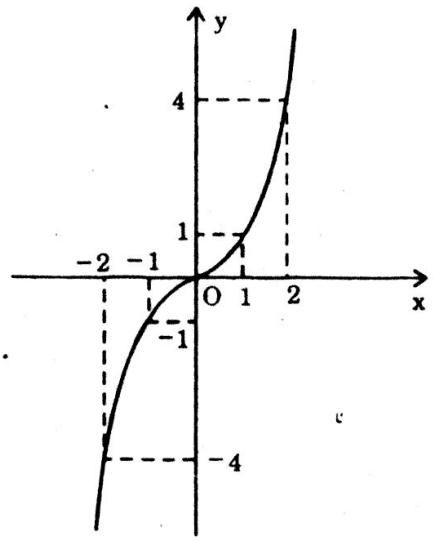
$= -|x + 1| + |x - 1|$ và D = R

$\Rightarrow$ f(x) : lẻ



$$y = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x < -1 \\ 2x \text{ nếu } -1 \le x \le 1 \\ 2 \text{ nếu } x \ge 1 \end{cases}$$

- Điểm đặc biệt A(–1, –2), B(1, 2).



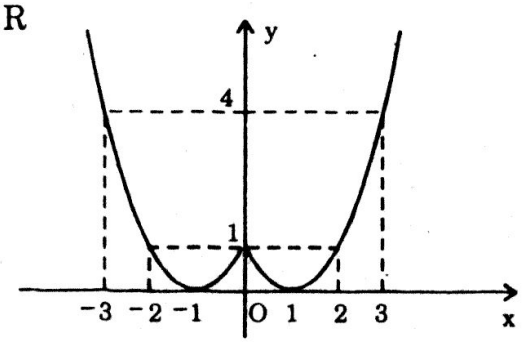
3) $y = x|x|$ là hàm số $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ D = R \end{cases}$

Ta có : $y = \begin{cases} x^2 \text{ nếu } x \ge 0 \\ -x^2 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị là một đường cong tạo bởi 2 nửa Parabol $y = x^2$ và $y = -x^2$ ráp nối nhau tạo gốc tọa độ và nhận O làm tâm đối xứng.

Điểm đặc biệt : (1, 1), (0, 0), (–1, –1).

4) $y = x^2 - 2|x| + 1$ là hàm số chẵn vì $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ D = R \end{cases}$



Ta có : $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \text{ nếu } x \ge 0 \\ x^2 + 2x + 1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Vậy đồ thị là 1 đường cong tạo bởi

phần $y = x^2 - 2x + 1$ có $x \ge 0$

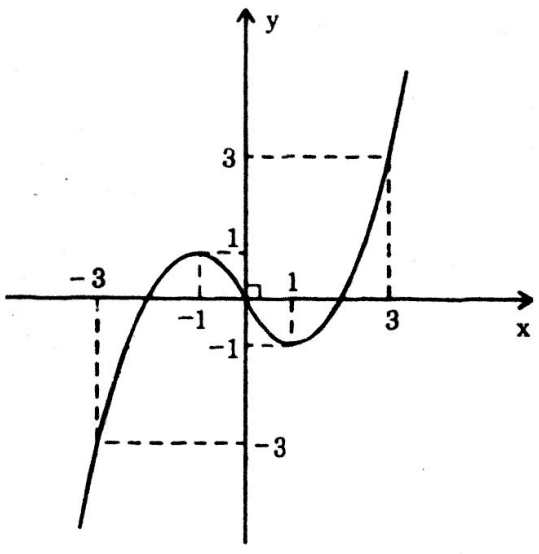
và phần $y = x^2 + 2x + 1$ có $x < 0$.

79 Xác định tính chẵn lẻ và vẽ đồ thị các hàm số

1) $y = x(|x| - 2)$ **2)** $y = x^2 - 2|x|$.

Giải

1)



$y = x(|x| - 2)$ là hàm số lẻ.

Ta có : $y = \begin{cases} x^2 - 2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x^2 - 2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Vậy đồ thị là một đường cong tạo bởi phần

parabol $y = x^2 - 2x$ có $x \geq 0$

và parabol $y = -x^2 - 2x$ có $x < 0$.

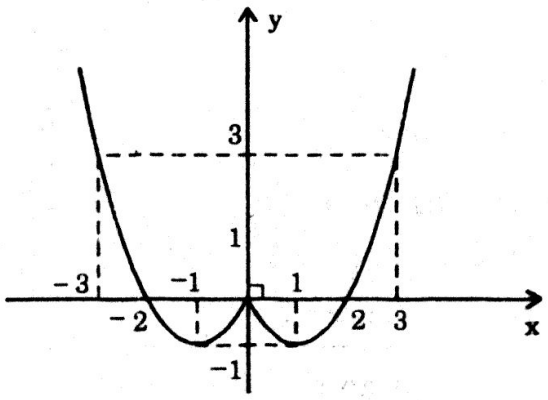
2) $y = x^2 - 2|x|$ là hàm số chẵn

Ta có : $y = \begin{cases} x^2 - 2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ x^2 + 2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số là đường cong tạo bởi

$y = x^2 - 2x$ có $x \geq 0$

và $y = x^2 + 2x$ có $x < 0$.



Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

§1. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN SỐ CÓ THAM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương trình bậc nhất có dạng : $ax + b = 0$ *(1)*

* *Nếu* $a \neq 0$ *thì (1) có 1 nghiệm là* $x = -\dfrac{b}{a}$ *(duy nhất).*

* *Nếu* $a = 0, b \neq 0$ *thì (1) :* $0x + b = 0$ *(VN).*

* *Nếu* $a = 0, b = 0$ *thì (1) :* $0x + 0 = 0$ *(vô số nghiệm).*

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

80 Giải và biện luận các phương trình sau theo m :

1) $3(m + 1)x + 4 = 2x + 5m + 5$ (1)

2) $m^2(x + 1) = x + m$ (2)

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $(3m + 1)x = 5m + 1$

- $3m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{1}{3}$, thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{5m + 1}{3m + 1}$
- $3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$ ta có (1) $\Leftrightarrow 0x = 5\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 1 = -\dfrac{2}{3}$ VN

2) (2) $\Leftrightarrow$ $(m^2 - 1)x = m - m^2 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 1)x = m(1 - m)$

- $m \neq \pm 1$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{-m}{m + 1}$.
- $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 0$ vô số nghiệm.
- $m = -1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = (-1)[1 + 1] = -2$ vô nghiệm .

81 Giải và biện luận các phương trình sau, theo tham số m :

1) $2(m-1)x - m(x-1) = 2m + 3$ (1)

2) $m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1$ (2)

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $(m-2)x = m + 3$

- $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m+3}{m-2}$.
- $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, thì (1) $\Leftrightarrow 0x = 5$ vô nghiệm.

2) (2) $\Leftrightarrow$ $3(m-1)x = m^2 - 1$

- $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{m^2-1}{3(m-1)} = \frac{(m+1)(m-1)}{3(m-1)} = \frac{m+1}{3}.$$

- $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, thì (2) $\Leftrightarrow 0x = 0$ (vô số nghiệm).

82 Giải và biện luận các phương trình sau, theo tham số m, n :

1) $\dfrac{4x+2}{3} - \dfrac{x+n}{m} = \dfrac{5(x-1)}{6}$ (1)

2) $m(mx + 2n^2) - m^2 = n^2(x + m)$ (2)

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $(m-2)x = -3m + 2n$

- $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{-3m+2n}{m-2}$
- $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì ta xét hai trường hợp :

α) $-3m + 2n \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 3$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x = -3m + 2n \neq 0$ VN.

β) $-3m + 2n = 0 \Leftrightarrow n = 3$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x = 0$ vô số nghiệm.

2) (2) $\Leftrightarrow$ $(m^2 - n^2)x = m(m - n^2)$

- $m^2 - n^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm n$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m(m-n^2)}{m^2-n^2}$
- $m^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm n$ ta xét hai trường hợp :

α) $m = n$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x = n^2(1 - n)$

* Nếu $n \neq 0$ và $n \neq 1$ thì (1) vô nghiệm.

* Nếu $n = 0$ hoặc $n = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x = 0$ vô số nghiệm.

β) $m = -n$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = n^2(1 + n)$

* Nếu $n \neq 0$ và $n \neq -1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = n^2(1 + n) \neq 0$ VN.

* Nếu $n = 0$ hoặc $n = -1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 0$. Vô số nghiệm.

83 Giải và biện luận theo tham số m, n các phương trình :

$$(m + n)^2x + 2m^2 = 2m(m + n) + (m^2 + n^2)x. \qquad (1)$$

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $x(-m^2 - n^2 + m^2 + 2mn + n^2) = 2mn$

$\Leftrightarrow$ $2mn\,x = 2mn$ (1)

- $m \neq 0$ và $n \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x = 1$.
- $m = 0 \vee n = 0$ thì (1) vố số nghiệm.

84 Giải và biện luận theo tham số m, n các phương trình :

1) $mx + n = \dfrac{2x + m.n}{2} + \dfrac{1}{3}$ (1)

2) $m\sqrt{x} = m - 1$ (2)

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $(m - 1)x = \dfrac{3mn - 6n + 2}{6}$

- Nếu $m - 1 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $m \neq 1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{3mn - 6n + 2}{6(m - 1)}$
- Nếu $m - 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = \dfrac{-3n + 2}{6}$

Ta xét hai trường hợp :

α) $-3n + 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $n = \dfrac{2}{3}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 0$ Vô số nghiệm.

β) $-3n + 2 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $n \neq \dfrac{2}{3}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = \dfrac{-3n + 2}{6} \neq 0$ VN.

2) Điều kiện để phương trình (2) có nghĩa là $x \geq 0$.

- Nếu $m \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{m - 1}{m}$ với điều kiện $\dfrac{m - 1}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m \geq 1$

Và lúc đó ta có $x = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2$.

- Nếu $m = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow 0.\sqrt{x} = -1$ vô nghiệm.

Tóm lại : + Nếu $m < 0 \vee m \geq 1$ thì (2) có nghiệm $x = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2$.

+ Nếu $0 \leq m < 1$ thì (2) vô nghiệm.

85 Giải và biện luận : 1) $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-1}{x-m} = 2$ (1)

2) $\frac{m-x}{x-1} + \frac{x-m}{1+x} = \frac{m(x-1)-2}{1-x^2}$ (2)

Giải

1) Miền xác định $D = R\setminus\{1, m\}$.

$$\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-1}{x-m} = 2 \Leftrightarrow (x-m)^2 + (x-1)^2 = 2(x-1)(x-m)$$

$$\Leftrightarrow 0x = (m-1)^2$$

- Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 0$ vô số nghiệm
- Nếu $m \neq 1$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $0x = (m-1)^2 \neq 0$ vô nghiệm.

2) Miền xác định $D = R\setminus\{-1, 1\}$

$$\frac{m-x}{x-1} + \frac{x-m}{1+x} = \frac{m(x-1)-2}{1-x^2} \Leftrightarrow (m-2)x = 2-m$$

- Nếu $m = 2$ thì $(2) \Leftrightarrow 0x = 0$ vô số nghiệm.
- Nếu $m \neq 2$ thì $(2) \Leftrightarrow x = \frac{2-m}{m-2} = -1$.

86 Với điều kiện nào của m, các phương trình sau vô nghiệm.

1) $(m+1)^2x + 1 - m = (7m-5)x$ (1)

2) $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$ (2)

Giải

1) $(1) \Leftrightarrow (m-2)(m-3)x = m-1$

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m = 2 \vee m = 3$ vì khi đó $(2) \Leftrightarrow 0x = m-1$.

2) Miền xác định D = R\{ −1, 0}.

(2) $\Leftrightarrow$ $x(x + m) + (x + 1)(x - 2) = 2x(x + 1)$ $\Leftrightarrow$ $(m - 3)x = 2$

(2) VN $\Leftrightarrow$ $m = 3$.

87 Với những điều kiện nào của m thì các phương trình sau có nghiệm :

1) $m^2(x - 1) = 4x - 3m + 2$. với $x > 0$ (1)

2) $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$ (2).

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $(m - 2)(m + 2)x = (m - 1)(m - 2)$

- $m = 2$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 0$ thỏa điều kiện bài toán.
- $m = -2$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 12$ nên không thỏa, (1) vô nghiệm.
- $m \neq \pm 2$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{m - 1}{m - 2}$

Vì $x > 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m - 1}{m - 2} > 0$ $\Leftrightarrow$ $m > 1$ và $m < -2$.

2) TH_1 : $x \geq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $x = 5 - 3m$

Theo điều kiện $x \geq 0$ thì $5 - 3m \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $m \leq \dfrac{5}{3}$.

TH_2 : $x < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $x = 2m - 4$

Theo điều kiện $x < 0$ thì $2m - 4 < 0$ $\Leftrightarrow$ $m < 2$.

Kết hợp 2 trường hợp ta chọn $m \leq \dfrac{5}{3}$.

88 Với điều kiện nào của tham số m thì các phương trình sau có vô số nghiệm.

1) $m^2x = 9x + m^2 - 4m + 3$ (1) 2) $m^3x = mx + m^2 - m$ (2)

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $(m^2 - 9)x = m^2 - 4m + 3$

Để (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \end{cases}$ để có dạng $0x = 0$ $\Leftrightarrow$ $m = 3$.

2) (2) $\Leftrightarrow$ $(m^3 - m)x = m^2 - m$ $\Leftrightarrow$ $m(m^2 - 1)x = m(m - 1)$

Để (2) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} m(m^2 - 1) = 0 \\ m(m - 1) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $m = 0 \vee m = 1$.

89 Giải phương trình : $\frac{5x+3}{4} - x = \frac{|2x-3|}{2}$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $x + 3 = 2|2x - 3|$

- Nếu $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì $|2x - 3| = 2x - 3$

  Lúc đó (1) $\Leftrightarrow$ $x + 3 = 2(2x - 3)$ $\Leftrightarrow$ $x = 3$ (thỏa điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$).

- Nếu $2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ thì $|2x - 3| = -2x + 3$

  Lúc đó (1) $\Leftrightarrow$ $x + 3 = -2(2x - 3)$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{3}{5}$ (thỏa điều kiện $x < \frac{3}{2}$).

Do đó phương trình (1) có 2 nghiệm là $x = 3 \vee x = \frac{3}{5}$.

90 Cho phương trình : $\frac{4x-m}{6} - 1 = \frac{2x+m}{3} - \frac{3(4-x)}{12}$ (1)

1) Giải phương trình (1). Xác định m để phương trình (1) có nghiệm $x = -2$.

2) Tìm các giá trị nguyên của m sao cho phương trình có nghiệm x thỏa $0 < x < 5$.

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow$ $2(4x - m) - 12 = 4(2x + m) - 3(4 - x)$

$\Leftrightarrow$ $3x = -6m$ $\Leftrightarrow$ $x = -2m$

Để nghiệm $x = -2$ $\Leftrightarrow$ $-2m = -2$ $\Leftrightarrow$ $m = 1$

2) Từ điều kiện $0 < x < 5$ ta suy ra $0 < -2m < 5$ hay $-5 < 2m < 0$.

Ta suy ra $-\frac{5}{2} < m < 0$. Vậy $m = -2 \vee m = -1$.

91 Giải và biện luận phương trình : $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2$ (1)

với a, b là 2 số cho trước.

Giải

Ta có : $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \neq a, x \neq b \\ a(x-a) + b(x-b) = 2(x-a)(x-b) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a, x \neq b \\ (x-a)(x-a-b)+(x-b)(x-a-b)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a, x \neq b \\ [x-(a+b)][2x-(a+b)]=0 \end{cases} \quad (2)$$

Ta có : $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-(a+b)=0 \\ 2x-(a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b \\ x=\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$

- Phương trình (1) nhận nghiệm $x = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b \neq a \\ x=a+b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

- Phương trình (1) nhận nghiệm $x = \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \neq a \\ x=\dfrac{a+b}{2} \neq b \end{cases} \Leftrightarrow a \neq b$

Tóm lại :

+ $a \neq 0$; $b \neq 0$ và $a \neq b$: phương trình (1) có 2 nghiệm :

$$x = a + b \; ; \; x = \frac{a+b}{2}.$$

+ $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a = b$, phương trình (1) có 1 nghiệm : $x = a + b$.

+ $a + b = 0$ và $a \neq 0$, $b \neq 0$ phương trình (1) có 1 nghiệm : $x = 0$.

+ $a = b = 0$: phương trình (1) vô nghiệm.

92 Giải và biện luận theo tham số m các phương trình sau :

1) $|x + m| = |x - m + 2|$ **2)** $|x - m| = |x + 1|$.

Giải

1) $|x - m + 2| = |x + m|$ (1)

* $x - m + 2 = x + m \Leftrightarrow 0x = 2(m + 1)$

$m \neq -1$: phương trình (1) vô nghiệm.

$m = -1$: phương trình (1) vô số nghiệm.

* $x - m + 2 = -x - m \Leftrightarrow x = -1$

Tóm lại : $m \neq -1$: phương trình (1) có nghiệm $x = -1$

$m = -1$: mọi $x \in R$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

2) $|x - m| = |x + 1|$ (2)

- $x - m = x + 1 \Leftrightarrow 0x = m + 1$ (2)

$m \neq -1$: phương trình (2) vô nghiệm.

$m = -1$: phương trình (2) vô số nghiệm.

- $x - m = -x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{m-1}{2}$

Tóm lại : $m \neq -1$: phương trình (2) có nghiệm $x = \dfrac{m-1}{2}$.

$m = -1$: phương trình (2) vô số nghiệm.

93 Giải các phương trình sau : **1)** $|3x - 1| - |2x + 3| = 0$ (1

2) $2|x| - |x - 3| = 3$ (2

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2x + 3 \\ 3x - 1 = -2x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

2) Để giải (2) ta lập bảng xét dấu như sau :

x		0		3	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -2x + x - 3 = 3 & \text{nếu } x \leq 0 \quad \Leftrightarrow x = -6 \\ 2x + x - 3 = 3 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2 \\ 2x - x + 3 = 3 & \text{nếu } x \geq 3 \quad \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy (2) có 2 nghiệm $x = -6$, $x = 2$.

94 Giải các phương trình : **1)** $|7 - 2x| = |5 - 3x| + |x + 2|$ (1

2) $|2 - |1 - |x||| = 1$ (2

Giải

1) (1) $\Leftrightarrow |(5 - 3x) + (x + 2)| = |5 - 3x| + |x + 2|$

$\Leftrightarrow (5 - 3x)(x + 2) = |5 - 3x| \,.\, |x + 2|$

$\Leftrightarrow (5 - 3x)(x + 2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \dfrac{5}{3}$

2) (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1 - |x|| = 1 \\ |1 - |x|| = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| = 2 \\ |x| = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = +2 \\ x = -4 \\ x = +4 \end{array}\right.$

95 Giải và biện luận theo a, b phương trình : $a|x+2| + a|x-1| = b$ (1)

Giải

Ta có : $a|x+2| + a|x-1| = b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a(x+2) - a(x-1) = b & \text{khi } x \le -2 \\ a(x+2) - a(x-1) = b & \text{khi } x \in (-2, 1] \\ a(x+2) + a(x-1) = b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax = a + b & \text{khi } x \le -2 \\ 0x = b - 3a & \text{khi } x \in (-2, 1] \\ 2ax = b - a & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Biện luận :

1) $a = 0, b \neq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

2) $a = b = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm tùy ý.

3) $a \neq 0$. Trường hợp này ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\right) & \text{khi } x \le -2 \\ 0x = b - 3a & \text{khi } x \in (-2, 1] \\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right) & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Mà $x = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\right) \le -2 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} \ge 4 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \ge 3$

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right) > 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} - 1 > 2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > 3$

$0x = b - 3a$ đúng (có nghiệm) khi $b - 3a = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 3.$

Tóm lại :

1) $a = 0, b \neq 0$: phương trình (1) vô nghiệm.

2) $a = b = 0$: phương trình (1) vô số nghiệm.

3) $a \neq 0$ thì :

a) $\frac{b}{a} > 3$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm :

$$x = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\right), \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right)$$

b) $\frac{b}{a} = 3$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \in (-2, 1]$.

c) $\frac{b}{a} < 3$ thì phương trình (1) vô nghiệm..

96 Giải và biện luận theo a, b phương trình : $\frac{ax+b}{x-a} = \frac{x-b}{x+a}$ (1)

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a, x \neq -a \\ x[(a-1)x + (a^2 + a + 2b)] = 0 \end{cases}$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (a-1)x + a^2 + a + 2b = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Biện luận :

1) Phương trình (1) có nghiệm $x = 0$, $\forall a \neq 0$ vì $x \neq a$, $x \neq -a$.

2) $a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ thì $(3) \Leftrightarrow x = \frac{a^2 + a + 2b}{1-a}$

Phương trình (1) nhận nghiệm $x = \frac{a^2 + a + 2b}{1-a}$ với điều kiện :

$$\begin{cases} \frac{a^2 + a + 2b}{1-a} \neq a \\ \frac{a^2 + a + 2b}{1-a} \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq -a^2 \\ b \neq -a \end{cases}$$

3) $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ thì $(3) \Leftrightarrow 0x + 2 + 2b = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R & \text{nếu } b = -1 \\ VN & \text{nếu } b \neq -1 \end{cases}$$

Tóm lại :

- $a = 1$ thì phương trình (1) chỉ có nghiệm $x = 0$ khi $b \neq -1$ và phương trình (1) có nghiệm $x \in R\backslash\{-1, 1\}$ khi $b = -1$.
- Nếu $a = 0$ thì phương trình (1) chỉ có nghiệm $x = 2b$ khi $b \neq 0$ và phương trình (1) VN nếu $b = 0$.
- Nếu $a \neq 0$, $a \neq 1$ thì phương trình (1) chỉ có nghiệm $x = 0$ khi $b = -a^2$ hay $b = -a$ và phương trình (1) có nghiệm $x = 0$, $x = \frac{a^2 + a + 2b}{1-a}$ khi $b \neq -a^2$, $b \neq -a$.

GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

* *Khi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 là hằng số ta thường dùng phương pháp cộng hay phương pháp thế.*

* *Khi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 có chứa tham số m, ta giải và biện luận hệ phương trình trên bằng phương pháp Cramer như sau :*

Ta tính các định thức : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Biện luận :

1. *Nếu $D \neq 0$, hệ phương trình cho có nghiệm duy nhất :*

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

2. *Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ phương trình cho vô nghiệm.*
3. *Nếu $D = 0$ và $D_x = D_y = 0$: Hệ phương trình cho vô số nghiệm.*

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

97 Giải và biện luận hệ theo phương trình sau :

$$\begin{cases} mx + y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$$; m là tham số.

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & m \end{vmatrix} = 3m - 6,$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6m - 12.$$

- Nếu $D = m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$, thì hệ phương trình có nghiệm:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3m - 6}{m^2 - 4} = \frac{3(m - 2)}{(m + 2)(m - 2)} = \frac{3}{m + 2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{6m - 12}{(m + 2)(m - 2)} = \frac{6(m - 2)}{(m + 2)(m - 2)} = \frac{6}{m + 2}$$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

α) Khi $m = 2 \Rightarrow D_x = 0, D_y = 0$: hệ phương trình vô số nghiệm.

β) Khi $m = -2 \Rightarrow D_x = -12, D_y = -24$: hệ phương trình vô nghiệm.

98 Giải và biện luận hệ phương trình sau : $\begin{cases} mx + (m + 2)y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m & m + 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2)$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & m + 2 \\ m & m \end{vmatrix} = 2m - m^2 - 2m = -m^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2$$

Do đó :

1) Khi $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq -2$

Hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-m^2}{(m + 1)(m + 2)} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^2 - 2}{(m + 1)(m + 2)} \end{cases}$

2) Khi $D = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hay $m = -2$

a) $m = -1 \Rightarrow D_x = -1, D_y = -1$: hệ phương trình vô nghiệm.

b) $m = -2 \Rightarrow D_x = -4, D_y = 2$: hệ phương trình vô nghiệm.

99 Giải và biện luận hệ : $\begin{cases} mx + ny = m^2 + n^2 \\ nx + my = 2mn \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m & n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 - n^2$

$$D_x = \begin{vmatrix} m^2 + n^2 & n \\ 2mn & m \end{vmatrix} = m^3 + mn^2 - 2mn^2 = m^3 - mn^2 = m(m^2 - n^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m^2 + n^2 \\ n & 2mn \end{vmatrix} = 2m^2n - m^2n - n^3 = m^2n - n^3 = n(m^2 - n^2)$$

Biện luận :

1) $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm n$: hệ có nghiệm duy nhất : $x = \dfrac{D_x}{D} = m$; $y = \dfrac{D_y}{D} = n$

2) Nếu $m = n$: $D = D_x = D_y$.

Hệ phương trình cho $\Leftrightarrow \begin{cases} nx + ny = 2n^2 \\ nx + ny = 2n^2 \end{cases} \Leftrightarrow n(x + y) = 2n^2$.

- $n = 0$: hệ đúng với mọi $x, y \in R$
- $n \neq 0$: hệ $\Leftrightarrow x + y = 2n \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2n - t \end{cases} \quad t \in R$

3) Nếu $m = -n$, hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} -nx + ny = 2n^2 \\ nx - ny = 2n^2 \end{cases} \Leftrightarrow n(x - y) = 2n^2.$$

- $n = 0$: hệ phương trình có nghiệm $\forall x, y \in R$
- $n \neq 0$: hệ phương trình $\Leftrightarrow x - y = -2n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2n + t \end{cases} \quad t \in R$.

Tóm lại :

1) $m = \pm n$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$

2) $m = n = 0$: $\forall x, y \in R$

3) $m = n \neq 0$: $\begin{cases} x = t \\ y = 2n - t \end{cases} \quad t \in R$

4) $m = -n = 0$: $\forall x, y \in R$

5) $m = -n \neq 0$: $\begin{cases} x = t \\ y = 2m + t \end{cases} \quad t \in R$

100 Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} 2mx + 3y = 5 \\ (m + 1)x + y = 0 \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -m - 3;$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 ; \quad D_y = \begin{vmatrix} 2m & 5 \\ m+1 & 0 \end{vmatrix} = -5m - 5$$

Biện luận :

1) Nếu $D = -m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$: hệ phương trình có 1 nghiệm

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{-m-3}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5m-5}{-m-3}$$

2) Nếu $D = -m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$. Khi đó ta có : $D_x = 5 \neq 0$.

Do đó : khi $m = -3$ hệ phương trình vô nghiệm.

101 Giải và biện luận hệ phương t : $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{vmatrix} = m^2 - 1; \quad D_x = \begin{vmatrix} 0 & -m \\ m+1 & -1 \end{vmatrix} = m(m+1)$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = m + 1$$

Biện luận :

1) Khi $D = m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 1$, hệ phương trình có 1 nghiệm

$$x = \frac{m(m+1)}{m^2-1} = \frac{m}{m-1}; \quad y = \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{1}{m+1}$$

2) Khi $D = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

- Khi $m = 1$ thì $D_x = 2$, $D_y = 2$ $(D = 0)$: hệ phương trình vô nghiệm.
- Khi $m = -1$ thì $D = 0$, $D_x = D_y = 0$: hệ phương trình vô số nghiệm.

102 Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} ax - y = a^2 \\ bx - y = b^2 \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} a & -1 \\ b & -1 \end{vmatrix} = b - a, \quad D_x = \begin{vmatrix} a^2 & -1 \\ b^2 & -1 \end{vmatrix} = b^2 - a^2,$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab(b - a)$$

Biện luận :

1) Nếu $D = b - a \neq 0 \Leftrightarrow b \neq a$: hệ phương trình có 1 nghiệm

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{ab(b - a)}{b - a} = ab$$

2) Nếu $D = b - a = 0 \Leftrightarrow a = b$, lúc này ta có $D_x = 0$, $D_y = 0$

Nên hệ phương trình có vô số nghiệm, $S = \left\{\left(x, \frac{a(x - a)}{x}\right), x \in R\right\}$.

103 Định m để hệ có nghiệm duy nhất : (A) $\begin{cases} (m + 1)\frac{2}{x} + m\frac{1}{y} = m \\ (m - 2)\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2(m - 1) \end{cases}$

Giải

Điều kiện để hệ phương trình có nghĩa là $x \neq 0$, $y \neq 0$

Đặt ẩn phụ : $u = \frac{2}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, thì : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)v + mv = m \\ (m - 2)u + 2v = 2(m - 1) \end{cases}$ (II)

Để (I) có nghiệm duy nhất x, y ($\neq 0$) $\Leftrightarrow$ (II) phải có nghiệm duy nhất u, v ($\neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \\ Dx \neq 0 \\ Dy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m^2 \neq 0 \\ 2m(2 - m) \neq 0 \\ m^2 + 2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm\sqrt{2} \\ m \neq 0, m \neq 2 \\ m \neq -1 - \sqrt{3}, m \neq -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

104 Định m để hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} (m + 1)x + 8y = 4m \\ mx + (m + 3)y = 3m - 1 \end{cases}$ (A)

Giải

Hệ có nghiệm duy nhất khi $D \neq 0$

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m + 1 & 8 \\ m & m + 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 - 8m \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 3$.

105 Định m để hệ có vô số nghiệm : $\begin{cases} -4x + my = 1 + m \\ (m + 6)x + 2y = 3 + m \end{cases}$

Giải

Để hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $D = Dx = Dy = 0$

Ta có : $D = \begin{vmatrix} -4 & m \\ m+6 & 2 \end{vmatrix} = -m^2 - 6m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -2 \\ m = -4 \end{bmatrix}$

$D_x = \begin{vmatrix} 1+m & m \\ 3+m & 2 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -2 \end{bmatrix}$

$D_y = \begin{vmatrix} -4 & m+1 \\ m+6 & 3+m \end{vmatrix} = -m^2 - 11m - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -2 \\ m = -9 \end{bmatrix}$

Vậy khi $m = -2$ thì $D = D_x = D_y = 0$ hệ phương trình có vô số nghiệm.

106 Định m nguyên để hệ có nghiệm nguyên : $\begin{cases} (m+1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (m-1)(2m+1)$

$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ m^2+2m & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m + 1 = (m+1)(2m+1)$

$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2+2m \end{vmatrix} = 4m^2 + 2m = 2m(2m+1)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi $D = (m-1)(2m+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad m \neq 1$ và $m \neq -\frac{1}{2}$

Lúc này : $x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)(2m+1)} = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m(2m+1)}{(m-1)(2m+1)} = \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1}$

Để x, y nguyên $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{m-1}$ nguyên $\Leftrightarrow$ 2 là bội của $(m-1)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m-1 = 2 \\ m-1 = -2 \\ m-1 = 1 \\ m-1 = -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 3 \\ m = -1 \\ m = 2 \\ m = 0 \end{bmatrix}$

107 Định m để hệ phương trình vô nghiệm : $\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2 \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} 2m^2 & 3(m-1) \\ m & m-2 \end{vmatrix} = 2m^3 - 7m^2 + 3m$

* Để hệ phương trình vô nghiệm điều kiện cần ta phải có $D = 0$

$\Leftrightarrow \quad m(2m^2 - 7m + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \vee m = 3 \vee m = \dfrac{1}{2}$

* Điều kiện đủ (kiểm tra lại)

- Với $m = 0$ thì hệ cho trở thành : $\begin{cases} -3y = 3 \\ -2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x \in R \end{cases}$

  Vậy hệ có vô số nghiệm $(x, -1)$. Nên $m = 0$ bị loại.

- Với $m = 3$ thì hệ cho trở thành : $\begin{cases} 18x + 6y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = \dfrac{1}{2} \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ (VN)

  Vậy $m = 3$ (nhận).

- Với $m = \dfrac{1}{2}$ thì hệ cho trở thành : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}y = 3 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ (VN)

  Vậy $m = \dfrac{1}{2}$ (nhận).

Tóm lại : Để hệ phương trình cho vô nghiệm ta chọn : $m = 3 \vee m = \dfrac{1}{2}$.

108 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - 7y = 55 \\ 5x + 4y = 18 \end{cases}$

Giải

Ta có :

$D = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 47$; $D_x = \begin{vmatrix} 55 & -7 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = 346$; $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 55 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} = -221$

Vậy : $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{346}{47}$; $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-221}{47}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là $\left(\dfrac{346}{47}, \dfrac{-221}{47}\right)$.

109 Định m để hệ có nghiệm (x, y) thỏa xy lớn nhất : $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y - x = 10m + 5 \end{cases}$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10m + 5 & 2 \end{vmatrix} = 5(-2m + 1)$,

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 10m + 5 \end{vmatrix} = 20m + 15$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:

$$x = \frac{D_x}{D} = -2m + 1 \; ; \qquad y = \frac{D_y}{D} = 4m + 3$$

Vậy : $P = xy = (-2m + 1)(4m + 3) = -8m^2 - 2m + 3$

Ta thấy P = xy là parapol có phương trình $P = -8m^2 - 2m + 3$ có hệ số $a = -8 < 0$, bề lõm quay về phía $y < 0$, nên nó đạt lớn nhất tại đỉnh S với $m_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-16} = \frac{1}{8}$.

Kết luận $m = \frac{1}{8}$.

110 Định m để hệ pt có nghiệm (x, y) và thỏa $(x^2 + y^2)$ nhỏ nhất

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y - x = 10m + 5 \end{cases}$$

Giải

Tương tự bài trên ta có : $x = +2m + 1$, $y = 4m + 3$

Do đó : $x^2 + y^2 = 20m^2 + 20m + 10 = Y$

Đây là Parabol có $a = 20 > 0$, nên đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh S, $m_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Kết luận : Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì $x^2 + y^2$ nhỏ nhất.

111 1) Tìm nệ thức liên hệ giữa x, y độc lập đối với m.

2) Định m nguyên để hệ sau có nghiệm nguyên :

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \quad (A)$$

Giải

1) Ta có: $(A) \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-1) = 1-2y \\ m(y-2) = -1-2x \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1-2y}{x-1} = \dfrac{-1-2x}{y-2}$: đây là 1 hệ thức liên hệ giữa x, y độc lập đối với m.

2) Định m nguyên để hệ có nghiệm nguyên

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2-4$; $\quad D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 2m-1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2$;

$$D_y = \begin{vmatrix} m & a+1 \\ 2 & 2m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 3m - 2 = (m-2)(2m-1)$$

Vậy hệ (A) có nghiệm :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m-2)(m-1)}{(m-2)(m+2)} = \frac{m-1}{m+2} = 1 - \frac{3}{m+2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m+1}{m+2} = 2 - \frac{3}{m+2}$$

Để x, y nguyên thì 3 là bội số của m + 2.

Vậy $\begin{bmatrix} m+2 = 1 \\ m+2 = -1 \\ m+2 = 3 \\ m+2 = -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -1 \\ m = -3 \\ m = 1 \\ m = -5 \end{bmatrix}$

Chương 4

BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp biến đổi tương đương

Phương pháp này cơ bản nhất, nó dựa vào các tính chất cơ bản của bất đẳng thức, để biến đổi bất đẳng thức đã cho thành các bất đẳng thức tương đương đơn giản hơn. Nếu chứng tỏ bất đẳng thức đơn giản này đúng, thì bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

112 Chứng minh rằng : $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ (1)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq a^2+c^2+2ac+$

$+b^2+d^2+2bd$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd$, $ac+bd \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2 \geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd$

$\Leftrightarrow$ $b^2c^2-2(bc)(ad)+a^2d^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(bc-ad)^2 \geq 0$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

- Nếu $ac+bd<0$: bất đẳng thức đúng.

113 Chứng minh rằng : $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \dfrac{2a^2+2b^2}{4}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4} \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(a-b)^2}{4} \geq 0$.

114 Cho a, b > 0. Chứng minh rằng : $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$ (1)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $(a^3-a^2b)-(ab^2-b^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2(a-b)-b^2(a-b) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $(a^2-b^2)(a-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a-b)^2(a+b) \geq 0$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

115 Cho $a + b \geq 0$. Chứng minh rằng : $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$ (1)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{(a+b)^3}{8} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8} \leq \frac{4a^3+4b^3}{8}$

$\Leftrightarrow$ $3a^2b + 3ab^2 - 3a^3 - 3b^3 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $3a^2(b-a) + 3b^2(a-b) \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $3(b-a)(a^2-b^2) \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $3(b-a)(a-b)(a+b) \leq 0$ đúng

(vì $(a-b)$ và $(b-a)$ trái dấu, $(a+b) > 0$).

116 Chứng minh rằng : $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ thì $|a+b| < |1+ab|$.

Giải

Ta có: $|a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 1 + a^2b^2 + 2ab$

$\Leftrightarrow$ $1 - a^2 + a^2b^2 - b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $1 - a^2 - b^2(1-a^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(1-a^2)(1-b^2) \geq 0$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

117 Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$.

Giải

Ta có : $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} abd^2 < cdb^2 \\ abd^2 < cdb^2 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ đúng (do giả thiết).

118 Chứng minh rằng : $a^3 + 2 \geq a^2 + 2\sqrt{a}$ với $a \geq 0$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $a^3 + 2 - a^2 - 2\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-1) - 2(\sqrt{a}-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1) - 2(\sqrt{a}-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sqrt{a}-1)[a^2(\sqrt{a}+1) - 2] \geq 0$ (2)

- Nếu $a \geq 1 \Rightarrow \sqrt{a} - 1 \geq 0$ và $\sqrt{a} + 2 \geq 2$. Do đó (2) đúng.
- Nếu $a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} - 1 < 0$ và $\sqrt{a} + 1 < 2$. Do đó (2) đúng.

Tóm lại ta đã chứng minh : $a^3 + 2 \geq a^2 + 2\sqrt{a}$, $a \geq 0$.

119 Cho a, b > 0. Chứng minh rằng : $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a^3(a - b) + b^3(b - a) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a - b)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

120 Cho a > c, b > c, c > 0.

Chứng minh rằng : $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow$ $c(a - c) + c(b - c) + 2c\sqrt{(a - c)(b - c)} \leq ab$

$\Leftrightarrow$ $ac - c^2 + cb - c^2 + 2c\sqrt{(a - c)(b - c)} \leq ab$

$\Leftrightarrow$ $2c\sqrt{(a - c)(b - c)} \leq (ab + 2c^2 - ac - bc)$

$\Leftrightarrow$ $4c^2(ab - bc - ca + c^2) \leq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 4c^4 + 4abc^2 -$

$- 4ac^3 + 2abc^3 - 2acb^2$

$\Leftrightarrow$ $-4bc^3 \leq a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2 + 2bac^2 - 2acb^2$

$\Leftrightarrow$ $-4bc^3 \leq (ab - bc)^2 + c^2a^2 + 2abc^2$ (đúng).

121 Cho $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Giải

Ta có : $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow$ $b^2c + c^2a + a^2b \geq a^2c + b^2a + c^2b$

$\Leftrightarrow$ $b^2(c - a) + c^2(a - b) + a^2(b - c)$

$\geq b^2(c - b) + a^2(b - c) + c^2(a - b)$

$\geq (a^2 - b^2)(b - c) + c^2(a - b) \geq 0$

122 Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b)$.

Giải

Ta có : $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b)$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 8 \geq 2ab + 4a + 4b$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 + (a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0$ (đúng) $\Rightarrow$ đpcm.

123 Chứng minh rằng : $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$.

Giải

$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (\frac{a}{2} - b + c)^2 \geq 0$ (đúng) $\Rightarrow$ đpcm.

124 Chứng minh rằng : với $a \geq b \geq 1$: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$, $\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{ab - a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab - a^2}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{(b-a)}{(1+ab)}\left(\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{(b-a)}{(1+ab)}\left(\frac{a + ab^2 - b - ba^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{(b-a)^2\,(ab-1)}{(1+ab)\,(1+a^2)\,(1+b^2)} \geq 0$ đúng

Vì $a \geq b \geq 1 \Rightarrow \quad ab \geq 1 \quad \Rightarrow \quad ab - 1 \geq 0.$

125 Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \qquad \forall a, b, c \in R.$

Giải

Ta có : $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$ đúng, $\forall a, b, c \in R.$

126 Cho a, b, c, d, e $\in$ R. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e) \quad (1)$$

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - ab + b^2 + \frac{a^2}{4} - ac + c^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2 + \frac{a^2}{4} - ae + e^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0 \text{ đúng}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

127 Cho a > 0. Chứng minh rằng : $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{a} + \sqrt{a+2})^2 \leq 4\,(a+1)$

$\Leftrightarrow$ $a + a + 2 + 2\sqrt{a(a+2)} \leq 4\,(a+1)$

$\Leftrightarrow$ $2\sqrt{a(a+2)} \leq 2\,(a+1)$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a(a+2)} \leq a + 1$

$\Leftrightarrow$ $a\,(a+2) \leq (a+1)^2$ $\Leftrightarrow$ $2a + a^2 \leq a^2 + 2a + 1$

$\Leftrightarrow$ $0 \leq 1$ đúng

$\Rightarrow$ đpcm.

128 Cho a, b > 0. Chứng minh rằng : $(a^3 + b^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq (a + b)^2$.

Giải

Ta có : $(a^3 + b^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq (a + b)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a} + \frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{b} \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a} + \frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{b} - a^2 - 2ab - b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{b} - 2ab \geq 0 \text{ (đúng)} \quad \Rightarrow \quad \text{đpcm.}$$

Vì $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a^3 b^3}{ab}} = 2ab$ (Côsi).

129 Cho a, b, là 2 số thực $\neq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{a^4 + b^4 + 4a^2b^2 - 3a^3b - 3ab^3}{a^2b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 6a^2b^2 - 3a^3b - 3ab^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)^2 - 3ab\,(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [(a + b)\,(a - b)]^2 - 3ab(a - b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2[(a + b)^2 - 3ab] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 \left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \text{ đúng} \quad \Leftrightarrow \quad \text{đpcm.}$$

130 Chứng minh rằng nếu a, b là các số không âm, ta luôn có :

$$\frac{1 + a + b}{2} \geq \frac{1 + a + b + ab}{2 + a + b} \qquad (1)$$

Giải

Với điều kiện của giả thiết, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{2}{1 + a + b} \leq \frac{2 + a + b}{1 + a + b + ab} \leq \frac{(1 + a) + (1 + b)}{(1 + a)\,(1 + b)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{1 + a + b} \leq \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + a}$$

Ta luôn luôn có : $\quad \dfrac{1}{1 + a + b} \leq \dfrac{1}{1 + b}$ vì $a \geq 0$

$$\frac{1}{1 + a + b} \leq \frac{1}{1 + a} \text{ vì } b \geq 0$$

Cộng từng vế ta được : $\quad \dfrac{2}{1 + a + b} \leq \dfrac{1}{1 + a} + \dfrac{1}{1 + b} \quad \Rightarrow$ đpcm.

131 Chứng minh :

1) $a > b > 0 \Rightarrow \quad \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$.

2) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh : $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Giải

1) Vì $a > b > 0$ nên ta có : $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

2) Vì $a + b > 0$ nên : $a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab \le 2(a^2 + b^2)$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le (a^2 - 2ab + b^2) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le (a - b)^2$ đúng.

132 Chứng minh : $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad \forall a, b, c \in R.$

Giải

Ta có : $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow \quad 2(ab + bc + ca) \le 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ac) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$ đúng.

133 1) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d ta có :

$(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$ (BĐT Bunhicopski).

2) Áp dụng :

- Nếu $x^2 + y^2 = 1$, chứng minh : $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$.
- Nếu $x + 2y = 2$, chứng minh : $x^2 + y^2 \ge \frac{4}{5}$.

Giải

1) Ta có : $(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 b^2 + c^2 d^2 + 2abcd \le a^2 b^2 + a^2 d^2 + c^2 b^2 + c^2 d^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 d^2 + c^2 b^2 - 2abcd \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (ad - bc)^2 \ge 0$ đúng.

Đẳng thức xảy ra khi : $ad - bc = 0$.

2) Áp dụng :

a) $(x + y)^2 = (1.x + 1.y)^2 \le (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) = 2$

Tức là : $(x + y)^2 \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$

b) $4 = (x + 2y)^2 = (1.x + 2.y)^2 \le (1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 5(x^2 + y^2)$.

Tức là : $4 \le 5(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \ge \frac{4}{5}$

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

134 Cho 4 số không âm a, b, c, d . Chứng minh rằng :

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \qquad (1)$$

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $(a+b)(b+d) \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd}$

$\Leftrightarrow$ $ab + ad + cb + cd \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd}$

$\Leftrightarrow$ $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$ (theo Cauchy) **(đúng)**

$\Rightarrow$ **đpcm.**

135 Chứng minh rằng : $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$ **với a, b, c ≥ 0.**

Giải

Ta có : $(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$

Ta lại có : $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$; $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$;

$abc = \sqrt[3]{(abc)^3}$ (Cauchy)

Vậy : $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$.

136 Chứng minh rằng : $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[4]{c} \geq 9\sqrt[9]{abc}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho chín số không âm là :

$$\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{a}\ ,\ \sqrt[3]{b}\ ,\ \sqrt[3]{b}\ ,\ \sqrt[3]{b}\ ,\ \sqrt[4]{c}\ ,\ \sqrt[4]{c}\ ,\ \sqrt[4]{c}\ ,\ \sqrt[4]{c}$$

Ta có : $\dfrac{2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[4]{c}}{9} \geq \sqrt[9]{\sqrt{a}\ \sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[4]{c}\ \sqrt[4]{c}\ \sqrt[4]{c}\ \sqrt[4]{c}} \geq 9\sqrt[9]{abc}$

Vậy : $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[4]{c} \geq 9\sqrt[9]{abc}$.

137 Chứng minh rằng : $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c} \geq a + b + c$ **với a, b, c ≥ 0.**

Giải

Ta có : $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{bc^2a}{ab}} = 2c$

$\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ba}{c} \geq 2\sqrt{\dfrac{b^2ca}{ca}} = 2b$

$$\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} = 2a$$

Suy ra : $2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a + b + c) \Rightarrow$ đpcm.

138 Chứng minh rằng : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$ với a, b, c ≥ 0 (1)

Giải

Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (2)

Ta lại có : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{9}$

$\geq \frac{ab + bc + ca + 2ab + 2bc + 2ca}{9}$ (do 2)

Vậy : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{9} = \frac{ab + bc + ca}{3}$

Suy ra : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$.

139 Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ $\forall a, b, c \in R$.

Giải

Áp dụng BĐT Cauchy, cho 2 số không âm ta có:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$

$\Rightarrow$ $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$ $\Rightarrow$ đpcm.

140 Chứng minh rằng : $a^2 + 2 \geq 2\sqrt{a^2 + 1}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, cho 2 số không âm $a^2 + 1$ và 1.

Ta có : $(a^2 + 1) + 1 \geq 2\sqrt{1.(a^2 + 1)}$

Vậy : $a^2 + 2 \geq 2\sqrt{a^2 + 1}$ (đpcm).

141 Chứng minh rằng : $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

Ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$ $\Rightarrow$ $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ đpcm.

142 Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

Giải

Ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^2 + 1 \geq 2b$

$\Rightarrow$ $2(a^2 + b^2 + 1) \geq 2(ab + b + a)$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$ (đpcm).

143 Chứng minh rằng : $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ (1)

Giải

Ta có:

(1) $\Leftrightarrow$ $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2acb^2 + 2abc^2 + 2bca^2 \geq 3a^2bc + 3acb^2 + 3abc^2$

Mà $a^2b^2 + c^2a^2 \geq 2\sqrt{a^4b^2c^2} = 2a^2bc$

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2\sqrt{a^4b^2c^2} = 2b^2ac$

$b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2\sqrt{a^4b^2c^2} = 2c^2ab$

$\Rightarrow$ $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab)$ $\Rightarrow$ đpcm.

144 Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$

với a, b, c > 0.

Giải

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$a^3 + abc \geq 2a^2\sqrt{bc}$, $b^3 + abc \geq 2b^2\sqrt{ac}$, $c^3 + 3abc \geq 2c^2\sqrt{ab}$

Suy ra : $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab})$

Mà $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$

Nên $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab})$

$\Rightarrow$ $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$.

145 Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ với a, b, c $\geq$ 0.

Giải

Đặt : $X = b + c$, $Y = c + a$, $Z = a + b$

$\Rightarrow$ $a + b + c = \dfrac{1}{2}(X + Y + Z)$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{Y+Z-X}{2}, \quad b = \frac{Z+X-Y}{2}, \quad c = \frac{X+Y-Z}{2}$$

Từ đó ta có :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{Y+Z-X}{2X} + \frac{Z+X-Y}{2Y} + \frac{X+Y-Z}{2Z}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{Y+Z}{X} + \frac{Z+X}{Y} + \frac{X+Y}{Z} - 3\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y}\right) + \left(\frac{Z}{X} + \frac{X}{Z}\right) + \left(\frac{Z}{Y} + \frac{Y}{Z}\right) - 3\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}[2+2+2-3] = \frac{3}{2} \quad \text{(do Cauchy)}$$

Vậy : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

146 Chứng minh rằng : $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$.

Giải

Ta có: $3(a^2+b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)$

$\geq (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$

$\Rightarrow \quad 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

Chia hai vế cho 9, ta có: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$.

147 Chứng minh rằng : $a^4+b^4+c^4 \geq (a+b+c)\,abc$.

Giải

Ta có : $abc(a+b+c) = a^2bc + b^2ca + c^2ab$

Mà $a^2bc + b^2ca + c^2ab \leq \frac{a^2(b^2+c^2)}{2} + \frac{b^2(a^2+c^2)}{2} + \frac{c^2(a^2+b^2)}{2}$ (Cauchy

$$\leq \frac{a^2b^2 + a^2ç^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + c^2b^2}{2}$$

$$\leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\Rightarrow \quad abc(a+b+c) \leq \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} + \frac{c^4+a^4}{2} = a^4+b^4+c^4$$

Vậy : $a^4+b^4+c^4 \geq (a+b+c)\,abc$.

148 Cho $x > y \geq 0$. Chứng minh rằng : $x + \dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$.

Giải

Vì $x > y \geq 0 \Rightarrow \quad x - y \geq 0$ và $y + 1 > 0$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số dương :

$$2x - 2y, \quad y + 1, \quad y + 1, \quad \frac{8}{(x-y)(y+1)^2}$$

Ta có :

$$(2x - 2y) + 2(y + 1) + \frac{8}{(x-y)(y+1)^2} \geq 4\sqrt[4]{(2x-2y)(y+1)^2 \frac{8}{(x-y)(y+1)^2}}$$

Thu gọn từng vế, ta có:

$$2x + 2 + \frac{8}{(x-y)(y+1)^2} \geq 4\sqrt[4]{16} = 8$$

$$\Rightarrow \quad 2x + \frac{8}{(x-y)(y+1)^2} \geq 6 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3 \quad \text{(đpcm).}$$

149 Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh rằng : $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$

với $m \in Z^+$.

Giải

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m} = 2\sqrt{\left(2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^m}$$

$$\geq 2\sqrt{4^m}$$

Vậy $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$.

150 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{b}{b+c} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{15}{2}.$$

Giải

Ta đã chứng minh được là : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ (1)

Mặt khác ta có : $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$ (Cauchy)

và $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ (Cauchy)

Suy ra: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có : $\frac{b}{b+c}+\frac{b+c}{a}+\frac{b}{c+a}+\frac{c+a}{b}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c} \geq \frac{15}{2}$.

151 Cho a, b > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Giải

Ta có : $\frac{a}{a^2+b^2} \leq \frac{a}{2ab}=\frac{1}{2b}$ vì theo Cauchy : $a^2+b^2 \geq 2ab$

Tương tự : $\frac{b}{b^2+c^2} \leq \frac{b}{2bc}=\frac{1}{2c}$

$$\frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{c}{2ac}=\frac{1}{2a}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

152 Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Giải

Ta có: $\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2} \leq \frac{a}{2ab}+\frac{b}{2ba}$ (Cauchy)

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự : $\frac{b+c}{b^2+c^2}=\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{b^2+c^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2}=\frac{c}{c^2+a^2}+\frac{a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế ta có :

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\quad\text{(đpcm).}$$

153 Chứng minh rằng : $\dfrac{x^2}{1+16x^4}+\dfrac{y^2}{1+16y^4}\le\dfrac{1}{4}\qquad\forall x, y\in R.$

Giải

Ta có : $\dfrac{x^2}{1+16x^4}=\dfrac{x^2}{1+(4x^2)^2}\le\dfrac{x^2}{2.4x^2}=\dfrac{1}{8}$ (Cauchy)

$$\frac{y^2}{1+16y^4}=\frac{y^2}{1+(4y^2)^2}\le\frac{y^2}{2.4y^2}=\frac{1}{8}$$

Vậy : $\dfrac{x^2}{1+16x^4}+\dfrac{y^2}{1+16y^4}\le\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$ (đpcm).

154 Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ge\sqrt{n}\ ,\ n\in Z^+.$

Áp dụng Cauchy cho n số không âm là 1, $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},...,\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có : $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ge n\sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt{1.2.3....n}}}=\sqrt[2n]{\dfrac{n^{2n}}{1.2.3...n}}$

$$\ge\sqrt[2n]{\frac{n^n.n^n}{1.2.3....n}}\ge\sqrt[2n]{\frac{(1.2..n)n^n}{(1.2..n)}}.$$

Vậy : $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ge\sqrt{n}\ .$

155 Chứng minh :

1) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\quad\forall a, b, c\in R$

2) $a^2+b^2+ab\ge 0\quad\forall a, b\in R.$ Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Giải

1) Ta có : $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\ge 0\qquad\forall x, y\in R$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2\ge 2xy\quad\forall x, y\in R$

Áp dụng điều trên ta có : $a^2+b^2\ge 2ab\quad\forall a, b\in R$

$b^2+c^2\ge 2bc\quad\forall b, c\in R$

$c^2+a^2\ge 2ca\quad\forall a, c\in R$

$\Rightarrow \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \quad a = b = c.$

2) Ta có : $a^2 + b^2 + ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $a + \frac{b}{2} = 0$ và $b = 0$ tức là $a = b = 0.$

156 Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng :

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ **2)** $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab.$

Giải

1) Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ ta có :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2.$$

2) Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương a, b và ab, 1. Ta có :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$$

Vậy : $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab.$

157 Cho hàm số : $f(x) = (x + 3)(5 - x)$ với $-3 \leq x \leq 5.$

Xác định x sao cho f(x) đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Với $-3 \leq x \leq 5$ thì $x + 3 \geq 0 \; ; \; 5 - x \geq 0$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm $x + 3$ và $5 - x$ ta có :

$$f(x) = (x + 3)(5 - x) \leq \left(\frac{x + 3 + 5 - x}{2}\right)^2 = 16$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \quad x + 3 = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \in [-3, 5].$

Vậy f(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 16 khi $x = 1.$

158 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

1) $f(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x > 0.$ **2)** $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$ với $x > 1.$

Giải

1) Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm x và $\frac{3}{x}$.

Ta có : $f(x) = x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$

Vậy : $f(x) = x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = \frac{3}{x}$ $\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{3}$ (vì $x > 0$).

Vậy f(x) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$ khi $x = \sqrt{3}$.

2) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $(x - 1)$ và $\frac{1}{x-1}$.

Ta có : $(x - 1) + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1).\frac{1}{(x-1)}} = 2$

Ta có : $f(x) = x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \Rightarrow f(x) \geq 2 + 1 = 3$

f(x) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $x = 2$ $\left(\text{khi } \frac{1}{x-1} = x - 1\right)$.

159 Cho $x^2 + y^2 = 2$ $(x, y > 0)$.

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của $(x + y)xy$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của xy^2.

Giải

1) Theo Cauchy, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + x^2 \geq 3$

$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} + y^2 \geq 3$

Cộng 2 bất đẳng thức trên, vế theo vế ta có :

$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$ (vì $x^2 + y^2 = 2$)

$\Rightarrow$ $\frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ nhỏ nhất là 2 $\Leftrightarrow$ $x = y = 1$.

2) Ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \forall x, y \quad \Rightarrow \quad xy \leq 1$.

Theo Bunhiacopski, ta có :

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad \Rightarrow \quad x + y \leq 2$$

Vậy $(x + y)xy \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (x + y)xy$ lớn nhất là 2 khi $x = y = 1$.

3) Ta có : $x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2x^2 + y^2 + y^2$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số không âm $2x^2, y^2, y^2$ ta có :

$$4 = 2x^2 + y^2 + y^2 \geq 3\sqrt[3]{2x^2y^4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2y^4 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad xy^2 \leq \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

Vậy xy^2 lớn nhất là $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ khi $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

160 Cho $xy = 4 \quad (x > 0, y > 0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

1) $x^2 + y^2$ **2)** $x^4 + y^4$

3) $(x + 1)(4y + 3)$ **4)** $x + y + x\sqrt{9 + y^2} + y\sqrt{9 + x^2}$.

Giải

1) Đặt : $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 2xy = 8$

$\Rightarrow$ $\min f(x, y) = 8$ khi $x = y = 2$.

2) $f(x, y) = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \geq (2xy)^2 - 2x^2y^2 = 2x^2y^2 = 32$

$\Rightarrow$ $\min f(x, y) = \min(x^4 + y^4) = 32$ khi $x = y = 2$.

3) $f(x, y) = (x + 1)(4y + 3) = 4xy + 3x + 4y + 3$

$= 19 + 3x + 4y \geq 19 + 2\sqrt{12.xy} = 19 + 2\sqrt{4.4.3} = 19 + 8\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $\min f(x, y) = 19 + 8\sqrt{3}$ khi $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $y = \sqrt{3}$.

4) Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad ; \quad x\sqrt{9 + y^2} + y\sqrt{9 + x^2} \geq 2\sqrt{xy\sqrt{(9 + x^2)(9 + y^2)}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x, y) \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy\sqrt{(9 + x^2)(9 + y^2)}}$$

$$\geq 4 + 4\sqrt[4]{81 + 9(x^2 + y^2) + 16} \geq 4 + 4\sqrt[4]{81 + 16 + 9 \times 8} = 4 + 4\sqrt{13}$$

$\Rightarrow$ $\min f(x, y) = 4 + 4\sqrt{13}$ khi $x = y = 2$.

161 Tìm giá trị lớn nhất của :

1) $f(x, y) = (2x - x^2)(y - 2y^2)$; $\quad 0 \le x \le 2$; $\quad 0 \le y \le \dfrac{1}{2}$

2) $f(x, y) = (1 - x)\sqrt{(x - y + 1)(x + y)}$; $\quad -x \le y \le x + 1$.

Giải

1)• Vì $0 \le x \le 2 \Rightarrow 2 - x \ge 0$, nên ta có :

$$2x - x^2 = x(2 - x) \le \left(\frac{x + 2 - x}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{(Cauchy cho x, 2 - x)}$$

• Vì $0 \le y \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2y \ge 0$, nên ta có :

$$2(y - 2y^2) = 2y(1 - 2y) \le \left(\frac{2y + 1 - 2y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ (Cauchy cho 2y, 1 - 2y)}$$

$$\Rightarrow \quad y - 2y^2 \le \frac{1}{8}$$

Vậy ta có $(2x - x^2)(y - 2y^2) \le \dfrac{1}{8}$

Nên $f(x, y) = (2x - x^2)(y - 2y^2)$ lớn nhất $= \dfrac{1}{8}$ khi $x = 1, y = \dfrac{1}{4}$.

2)• Nếu $x \ge 1$ thì $f(x, y) \le 0 \Rightarrow$ $f(x, y)$ lớn nhất là 0.

Khi $x = -y \vee x + 1 = y$; $x > 1$

• Mặt khác do : $-x \le y \le x + 1 \Rightarrow x + 1 \ge -x \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

Vậy nếu $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ thì ta có :

$$f(x, y) = (1 - x)\sqrt{(x - y + 1)(x + y)} \le (1 - x)\frac{1}{2}(x - y + 1 + x + y)$$

$$= (1 - x)\left(x + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left(1 - x + x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Vậy $f(x, y)$ lớn nhất là $\dfrac{9}{16}$ khi $x = \dfrac{1}{4}$ và $y = \dfrac{1}{2}$.

162 **1)** Cho $a > 0$, x, y là 2 số dương thỏa $a(x + y)\sqrt{3} = xy$

Tìm giá trị nhỏ nhất của xy và của $x^2 + y^2 - xy$.

2) Cho $a > 0$, x, y là 2 số dương thỏa : $a(x + y) + xy = a^2$ $(0 \le x,\ y \le a)$.
Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của xy.

Giải

1)• Từ giả thiết : $a(x + y)\sqrt{3} = xy \Rightarrow xy = a\sqrt{3}(x + y) \ge a\sqrt{3}\ 2\sqrt{xy}$

$\Rightarrow xy \ge 12a^2$

Vậy xy nhỏ nhất là $12a^2$ khi $x = y = 2a\sqrt{3}$.

• $x^2 + y^2 - xy \ge 2xy - xy = xy \ge 12a^2$

$\Rightarrow \min(x^2 + y^2 - xy) = 12a^2$ khi $x = y = 2a\sqrt{3}$.

2) xy nhỏ nhất là 0 khi $x = 0 \vee y = 0$ (vì $x, y \ge 0$)

Từ $a^2 = xy + a(x + y) \ge xy + 2a\sqrt{xy}$

$\Rightarrow 2a^2 \ge a^2 + xy + 2a\sqrt{xy} = \left(a + \sqrt{xy}\right)^2 \Rightarrow a\sqrt{2} - a \ge \sqrt{xy}$

Vậy : $xy \le a^2(\sqrt{2} - 1)^2$

$\Rightarrow$ xy lớn nhất là $a^2(\sqrt{2} - 1)^2$ khi $x = y = a(\sqrt{2} - 1)$.

163 Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} \ge 4.$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm là $a^2 + 1$, 4

Ta có : $(a^2 + 1) + 4 \ge 2\sqrt{4(a^2 + 1)} = 4\sqrt{a^2 + 1}$

Suy ra : $\dfrac{a^2 + 1 + 4}{\sqrt{a^2 + 1}} \ge 4 \Leftrightarrow \dfrac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 1}} \ge 4$ (đpcm).

164 Cho x, y, z ≥ 0. Chứng minh rằng : $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}\right)\left(\dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \ge 4.$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \ge 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}} = 2\sqrt{\frac{x}{z}}$$

$$\frac{z}{y} + \frac{y}{x} \ge 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 2\sqrt{\frac{z}{x}}$$

Nhân 2 bất đẳng thức cùng chiều, vế theo vế ta có :

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right) \geq 4\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}} = 4 \quad \text{(đpcm).}$$

165 Cho a, b ≥ 0. Chứng minh rằng : $(a + b)(1 + ab) \geq 4ab$.

Giải

Ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (Cauchy)

$1 + ab \geq 2\sqrt{ab}$

Suy ra : $(a + b)(1 + ab) \geq 4ab$ (đpcm).

166 Cho a, b, c ≥ 0. Chứng minh rằng : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Giải

Ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$

Suy ra : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$.

167 Cho a > 0. Chứng minh rằng : $\dfrac{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}{32a^2} \geq \sqrt{6}$.

Giải

Ta có : $a + 1 \geq 2\sqrt{a}$; $a + 2 \geq 2\sqrt{2a}$; $a + 3 \geq 2\sqrt{3a}$; $a + 4 \geq 2\sqrt{4a}$

Suy ra : $(a + 1)(a + 2)(a + 3)(a + 4) \geq 16\sqrt{24a^4} = 32a^2\sqrt{6}$

Vậy : $\dfrac{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}{32a^2} \geq \sqrt{6}$.

168 Cho a, b, c ≥ 0. Chứng minh rằng : $(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Giải

Ta có : $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

Suy ra : $(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (đpcm).

169 Cho a, b, c ≥ 0. Chứng minh rằng : $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Giải

Ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$

Suy ra : $2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$

Hay $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

170 Cho a, b > 0. Chứng minh rằng : $a + b + ab + 1 \geq 4\sqrt{ab}$.

Giải

Ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$

Suy ra : $a + b + ab + 1 \geq 4\sqrt{ab}$.

171 Cho a, b ≥ 0. Chứng minh rằng : $(1 + a)(1 + b) \geq (1 + \sqrt{ab})^2$.

Giải

Ta có : $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab$

Mà $1 + a + b + ab \geq 1 + 2\sqrt{ab} + ab = (1 + \sqrt{ab})^2$

Vậy : $(1 + a)(1 + b) \geq (1 + \sqrt{ab})^2$ đpcm.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI

172 Cho a, b, c ≥ $-\frac{3}{4}$ và a + b + c = 3. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{4a + 3} + \sqrt{4b + 3} + \sqrt{4c + 3} \leq 3\sqrt{7} .$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$(1.\sqrt{4a + 3} + 1.\sqrt{4b + 3} + 1.\sqrt{4c + 3})^2 \leq (1 + 1 + 1)(4a + 3 + 4b + 3 + 4c + 3)$

$\leq 3[4(a + b + c) + 9] = 3[4.3 + 9] = 63$

Vậy : $\sqrt{4a + 3} + \sqrt{4b + 3} + \sqrt{4c + 3} \leq \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ đpcm.

173 Cho 4 số thực u, v, x, y thỏa $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$.

Chứng minh rằng : $-\sqrt{2} \leq u(x - y) + v(x + y) \leq \sqrt{2}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$[u(x - y) + v(x + y)]^2 \leq (u^2 + v^2)[(x - y)^2 + (x + y)^2] = 1.2(x^2 + y^2) = 2$

Suy ra : $-\sqrt{2} \leq u(x - y) + v(x + y) \leq \sqrt{2}$ (đpcm).

174 Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng : $|x + 2y + 3z| \le \sqrt{14}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$(x + 2y + 3z)^2 \le (1 + 4 + 9)(x^2 + y^2 + z^2) = 14.1 = 14$$

Suy ra : $|x + 2y + 3z| \le \sqrt{14}$.

175 Cho $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 4$.

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$16 = (a + b + c + d)^2 \le (1 + 1 + 1 + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16}{4} \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

176 Cho $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng : $x^4 + y^4 + z^4 \ge \frac{1}{3}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$(xy + yz + zx)^2 \le (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad 1 \le (x^2 + y^2 + z^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, một lần nữa :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \le (1 + 1 + 1)(x^4 + y^4 + z^4)$$

Suy ra : $1 \le (x^2 + y^2 + z^2)^2 \le 3(x^4 + y^4 + z^4)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \le x^4 + y^4 + z^4 \quad \text{đpcm.}$$

177 Cho $a, b, c \ge -1$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \le 2\sqrt{3}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$(1.\sqrt{a+1} + 1.\sqrt{b+1} + 1.\sqrt{c+1})^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)[a + 1 + b + 1 + c + 1]$$

$$\le 3(a + b + c + 3) = 12 \quad (\text{vì } a + b + c = 1)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \le 2\sqrt{3} \quad \text{đpcm.}$$

178 Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c)^2.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}a\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}}b\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{c}}c\sqrt{c}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right]\left[(a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2 + (c\sqrt{c})^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad (a + b + c)^2 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a^3 + b^3 + c^3) \text{ (đpcm).}$$

179 Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$\left(1.\sqrt{a} + 1.\sqrt{b} + 1.\sqrt{c}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a + b + c) \qquad (1)$$

Ta lại có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = ab + bc + ca$ (vì abc = 1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3(a + b + c) \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c).$$

180 Cho $4a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng : $(6a + b)^2 \leq 10$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$(6a + b)^2 = [3(2a) + 1.b]^2 \leq (3^2 + 1^2)(4a^2 + b^2) = 10$$

Vậy : $(6a + b)^2 \leq 10$ (đpcm).

181 Chứng minh rằng : $|3a + 4b| \le 5\sqrt{a^2 + b^2}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$|3a + 4b| \le \sqrt{(3^2 + 4^2)(a^2 + b^2)} = 5\sqrt{a^2 + b^2} \text{ (đpcm).}$$

182 Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \ge \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \le (1 + 1 + 1)\left[\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \le \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \qquad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}} = 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge \frac{3}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Vậy : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \ge \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}\right)$.

183 Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $m^2 + n^2 = 1$

Chứng minh rằng : $|am + bn + c| \le \sqrt{2}$.

Giải

Ta có : $m^2 + n^2 + 1 = 2$ và áp dụng BĐT Bunhiacopski

$$(am + bn + c)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + 1) = 2$$

Vậy : $|am + bn + c| \le \sqrt{2}$

184 Cho a > c > 0, b > c > 0. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{(a + c)(b + c)} + \sqrt{(a - c)(b - c)} \le 2\sqrt{ab}\,.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$\left(\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}+\sqrt{a-c}\sqrt{b-c}\right)^2 \le (a+c+a-c)(b+c+b-c) \le 4ab$$

Suy ra : $\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)} \le 2\sqrt{ab}$ đpcm.

185 Cho $3x - 5y = 7$. Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 \ge \frac{49}{34}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$49 = (3x - 5y)^2 \le [3^2 + (-5)^2][x^2 + y^2]$$

Suy ra : $49 \le 34[x^2 + y^2] \Rightarrow x^2 + y^2 \ge \frac{49}{34}$ đpcm.

186 Chứng minh rằng : $-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$, $\forall x \in R$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$(1.\sin x + 1.\cos x)^2 \le (1^2 + 1^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

Suy ra : $-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$.

187 Cho $6x + y = 5$. Chứng minh rằng : $9x^2 + y^2 \ge 5$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$25 = (6x + y)^2 = [2(3x) + 1.y]^2 \le [2^2 + 1^2][(3x)^2 + y^2].$$

BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

188 Chứng minh rằng : $1994^{2000} + 1995^{2000} < 1996^{200}$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1994}{1995}\right)^{2000} + 1 < \left(\frac{1996}{1995}\right)^{2000} = \left(1 + \frac{1}{1995}\right)^{2000}$ (2)

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có :

$$\left(1 + \frac{1}{1995}\right)^{2000} > 1 + 2000\,\frac{1}{1995} > 1 + \left(\frac{1994}{1995}\right)^{2000}$$

Vậy (2) đúng, nên (1) đúng.

189 Chứng minh rằng : $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n-1}$ $(n > 1)$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $n^n > (n+1)^{n-1}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có :

Vì $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > 1 - \frac{n}{n+1} = 1 \Delta 1 + \frac{1}{n+1}$

Hay $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}$. Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

190 Cho $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng : $a^b + b^a > 1$ (1)

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có :

$$\left(1 + \frac{1-a}{a}\right)^b = \left(\frac{1}{a}\right)^b < 1 + \left(\frac{b(1-a)}{a}\right)$$

$(n+2$

$(n+2$

$\left(\frac{1}{a}\right)^b < \frac{a+b-ab}{a} \Rightarrow a^b > \frac{a}{a+b-ab}$

Tương tự $b^a > \frac{b}{a+b-ab}$

Vậy : $a^b + b^a > \frac{a+b}{a+b-ab} \Rightarrow a^b + b^a > 1.$

191 Cho 3 số tự nhiên $a < b < c$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $d > a$, ta có $a^d + b^d < c^d$.

Giải

Vì b và c là các số nguyên dương và $c > b$, nên $c \geq b + 1$

Do đó $\left(\frac{c}{d}\right)^d \geq \left(\frac{b+1}{b}\right)^d = \left(1 + \frac{1}{b}\right)^d$ (1)

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có : $\left(1 + \frac{1}{b}\right)^d \geq 1 + \frac{d}{b}$ (2)

Vì $d > a \Rightarrow \frac{d}{b} > \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^d \geq 1 + \frac{d}{b} > 1 + \frac{a}{b}$ (do (1), (2))

Mặt khác vì $a < b$ nên $\frac{a}{b} < 1$. Nhân liên tiếp 2 vế của bất đẳng thức này với $\frac{a}{b} > 0$, ta được :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b} \text{ .....} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^d < \frac{a}{b}$$

Vậy từ $\frac{c^d}{b^d} > 1 + \frac{a}{b} > 1 + \frac{a^d}{b^d} = \frac{b^d + a^d}{b^d}$

Từ bất đẳng thức cuối, ta được $c^d > a^d + b^d$.

192 Cho $a > 0, b > 0, k > 1$. Chứng minh rằng : $\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$ (1)

Giải

Ta có :(1) $\Leftrightarrow$ $(2a)^k + (2b)^k \geq 2(a+b)^k$ $\Leftrightarrow$ $(2a)^k + (2b)^k \geq 2(a+b)^k$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^k + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^k \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^k + \left(1 + \frac{a-b}{1+a}\right)^k \geq 2 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có :

$$\left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^k \geq 1 + k\frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^k \geq 1 + k\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

Vậy bất đẳng thức cho đã được chứng minh.

193 Cho $x > 0, x \neq 1$ và p, q nguyên dương, $p > q$.

Chứng minh rằng : $\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$.

Giải

- Theo Bernoulli, ta có $(1 + \alpha)^m > 1 + m\alpha$ với $\alpha > 1, m \in Q, m > 1$.
- Theo Bernoulli, ta có $(1 - \alpha)^m > 1 - m\alpha$ với $0 < \alpha < 1, m \in Q, m > 1$.
- Nếu $x > 1 \Rightarrow x^q > 1$

Đặt : $x^q = 1 + \alpha$; $\alpha > 0$ và $\frac{p}{q} = m > 1$ (vì $p > q > 0$)

Ta có : $(1 + \alpha)^{p/q} > 1 + \frac{p}{q}\alpha \Rightarrow (x^q)^{p/q} > 1 + \frac{p}{q}(x^q - 1)$

$$\Rightarrow \quad x^p - 1 > \frac{p}{q}(x^q - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$$

- Nếu $0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x^q < 1$.

  Đặt : $x^q = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$

  Ta có : $(1 - \alpha)^m > 1 - m\alpha \quad \Rightarrow \quad (x^q)^{p/q} > 1 - \frac{p}{q}(1 - x^q)$

  $$\Leftrightarrow \quad x^p - 1 > -\frac{p}{q}(1 - x^q) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$$

  Vậy ta luôn có : $\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$.

  Với $x > 0, x \neq 1$ và $p, q \in Z^+, p > 0$.

194 Chứng minh rằng : $n^{n+3} + (n + 1)^{n+3} < (n + 2)^{n+3}, \quad n \in N$ (1)

Giải

Ta có : $n^{n+3} + (n + 1)^{n+3} < 2(n + 1)^{n+3}$

Ta chỉ cần chứng minh :

$(n + 2)^{n+3} > 2(n + 1)^{n+3}$ (2) thì (1) đúng

$$(n + 2)^{n+3} > 2(n + 1)^{n+3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n + 2}{n + 1}\right)^{n+3} > 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+3} > 1 + \frac{n + 3}{n + 1} > 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có $\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+3} > 2$

Vậy (1) đã được chứng minh.

Chương 5

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. Dấu của nhị thức $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$a.f(x) < 0$	0	$a.f(x) > 0$	

II. Bất phương trình :

1. ***Định nghĩa :*** *Bất phương trình 1 ẩn số là 1 bất đẳng thức có một trong các dạng sau :*

$$f(x) > g(x) \quad ; \quad f(x) \geq g(x) \quad ; \quad f(x) < g(x) \quad ; \quad f(x) \leq g(x)$$

Giải bất phương trình : $f(x) > g(x)$ là tìm tập hợp các giá trị x_o của x sao cho $f(x_o) > g(x_o)$ đúng. Tập hợp đó gọi là tập nghiệm của bất phương trình.

2. ***Định nghĩa :*** *Bất phương trình hai ẩn số là 1 bất đẳng thức có một trong các dạng sau : $f(x, y) > g(x, y)$; $f(x, y) \geq g(x, y)$;*

$$f(x, y) < g(x, y) \; ; \quad f(x, y) \leq g(x, y).$$

3. ***Bất phương trình hệ quả, bất phương trình tương đương:***

Cho 2 bất phương trình :

$f(x) > g(x)$ *(1), có tập nghiệm là S.*

$h(x) > k(x)$ *(2), có tập nghiệm là T.*

a) *Nếu $S \subset T$ thì bất phương trình (2) gọi là bất phương trình hệ quả của bất phương trình (1).*

b) *Nếu $S = T$ thì bất phương trình (1) và bất phương trình (2) gọi là 2 bất phương trình tương đương.*

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

195 Giải bất phương trình : $2x(3x - 5) > 0$.

Giải

Ta lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
2x		−	0	+		+	
3x − 5		−		−	0	+	
2x(3x − 5)		+	0	−	0	+	

Vậy bất phương trình cho có nghiệm là $x < 0 \vee \frac{5}{3} < x$.

196 Giải bất phương trình : $25 - 16x^2 > 8x^2 - 10x$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $(5 + 4x)(5 - 4x) > -2x(5 - 4x) \Leftrightarrow (5 - 4x)(5 + 6x) > 0$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
−4x + 5		+		+	0	−	
6x + 5		−	0	+		+	
VT		−	0	+	0	−	

Vậy bất phương trình có nghiệm là :

$$-\frac{5}{6} < x < \frac{5}{4} \quad \text{hay} \quad S = \left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{4}\right).$$

197 Giải bất phương trình : $(2x - 3)(3x - 4)(5x + 2) > 0$.

Giải

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
2x − 3		−		−		−	0	+	
3x − 4		−		−	0	+		+	
5x + 2		−	0	+		+		+	
VT		−	0	+	0	−	0	+	

Vậy bất phương trình cho có nghiệm là :

$$-\frac{2}{5} < x < \frac{4}{3} \vee \frac{3}{2} < x \quad \text{hay} \quad S = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

198 Giải bất phương trình : $\dfrac{4x(3x+2)}{2x+5} > 0$.

Giải

TXĐ: $D = R \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
4x		−		−		−	0	+	
3x + 2		−		−	0	+		+	
2x + 5		−	0	+		+		+	
VT		−	‖	+	0	−	0	+	

Vậy nghiệm của bất phương trình là :

$$-\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2} \vee 0 < x \quad \text{hay} \quad S = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cup (0, +\infty).$$

198 Giải bất phương trình : $\dfrac{2x-5}{3x+2} < \dfrac{3x+2}{2x-5}$ (1)

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{3x+2} - \dfrac{3x+2}{2x-5} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-5)^2 - (3x+2)^2}{(3x+2)(2x-5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-5x^2 - 32x + 21}{(3x+2)(2x-5)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 + 32x - 21}{(3x+2)(2x-5)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(5x-3)(x+7)}{(3x+2)(2x-5)} > 0$$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-7		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
5x − 3		−		−		−	0	+		+	
x + 7		-	0	+		+		+		+	
3x + 2		−		−	0	+		+		+	
2x − 5		−		−		−		−	0	+	
VT		+	0	−	‖	+	0	−	‖	+	

Nghiệm của bất phương trình là $x < -7 \vee -\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{3}{5} \vee \dfrac{5}{2} < x$.

Hay $S = (-\infty, -7) \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

200 Giải bất phương trình : $\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x} + x > 0$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 1 + x(2 - x)}{2 - x} > 0 \Leftrightarrow \frac{5x - 1}{-x + 2} > 0$$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		2		$+\infty$
$5x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x + 2$		$+$		$+$	0	$-$	
VT		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Nghiệm của bất phương trình là : $\frac{1}{5} < x < 2$.

201 Giải bất phương trình: $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 + x - 3)^2 \geq 0$ (1)

Giải

Ta có : $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 + x - 3)^2 =$

$= [(x^2 - 2x + 3) + (x^2 + x - 3)].[(x^2 - 2x + 3) - (x^2 + x - 3)]$

$= (-3x + 6)(2x^2 - x)$

$= x(-3x + 6)(2x - 1)$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-3x + 6$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Nghiệm của bất phương trình là : $x \leq 0 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

Hay $S = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

202 Giải bất phương trình : $\dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} \geq x - 3$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 5 - (x - 3)(x + 1)}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x + 8}{x + 1} \geq 0$$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$4x + 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Nghiệm của bất phương trình (1) là: $x \leq -2 \vee -1 < x$

Hay $S = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$.

203 Giải bất phương trình : $\dfrac{(x - 1)^3(x + 2)^4(x + 6)}{(x - 7)^3(2 - x)^2} \leq 0$ (1)

Giải

Ta có : $\dfrac{(x - 1)^3(x + 2)^4(x + 6)}{(x - 7)^3(2 - x)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x - 1)(x + 6)}{(x - 7)} \leq 0$

Vì dấu của $(x - 1)^3$ là dấu của $(x - 1)$

dấu của $(x - 7)^3$ là dấu của $(x - 7)$

và $(x + 2)^4 \geq 0 \ \forall x$, $(2 - x)^2 > 0 \ \forall x$ (với $x \neq 2$)

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-6		1		7		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - 7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Nghiệm của bất phương trình là : $x \leq -6 \vee 1 \leq x < 2 \vee 2 < x < 7$

Hay $S = (-\infty, -6] \cup [1, 2) \cup (2, 7) \cup \{-2\}$.

204 Giải các bất phương trình :

1) $\dfrac{3x-4}{x-2} > 1$;

2) $\dfrac{2x-5}{2-x} \geq -1$;

3) $\dfrac{2}{x-1} \leq \dfrac{5}{2x-1}$;

4) $\dfrac{-4}{3x+1} < \dfrac{3}{2-x}$.

Giải

1) $\dfrac{3x-4}{x-2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{3x-4}{x-2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)}{x-2} > 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{x-2}$		$+$	0	$-$		$+$	

Ta có nghiệm của bất phương trình là : $S = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

2) $\dfrac{2x-5}{2-x} \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{2-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{2-x} \geq 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{x-3}{2-x}$		$-$		$+$	0	$-$	

Ta có nghiệm của bất phương trình là : $S = (2, 3]$.

3) $\dfrac{2}{x-1} \leq \dfrac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2x-1} - \dfrac{2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{(2x-1)(x-1)} \geq 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$-$		$+$		$-$	0	$+$	

Vậy nghiệm bất phương trình là : $S = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup [3, +\infty)$.

4) $\frac{-4}{3x+1} < \frac{3}{2-x} \Leftrightarrow \frac{3}{2-x} + \frac{4}{3x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{5x+11}{(2-x)(3x+1)} > 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
5x + 11		−	0	+		+		+	
2 − x		+		+		+	0	−	
3x + 1		−		−	0	+		+	
VT		+	0	−	‖	+	‖	+	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty, -\frac{11}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$.

205 Giải các bất phương trình :

1) $|2x - 5| \le x + 1$ 2) $|2x + 1| < x$

3) $|x - 2| > x + 1$ 4) $|x + 2| \ge x + 1$.

Giải

1. $|2x - 5| \le x + 1$ (1)

- Nếu $x \ge \frac{5}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $2x - 5 \le x + 1 \Leftrightarrow x \le 6$

Vậy $S_1 = \left[\frac{5}{2}, 6\right]$

- Nếu $x < \frac{5}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $-2x + 5 \le x + 1 \Leftrightarrow x \ge \frac{4}{3}$

Vậy $S_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right)$

- Vậy nghiệm của bất phương trình là :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, 6\right] = \left[\frac{4}{3}, 6\right].$$

2) $|2x + 1| < x$ (2)

- Nếu $x \ge -\frac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $2x + 1 < x \Leftrightarrow x < -1$ (vô lí) vì $x \ge -\frac{1}{2}$

• Nếu $x < -\frac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $-2x - 1 < x$ $\Leftrightarrow$ $-1 \le 3x$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{3} \le x$ vô lí vì $x < -\frac{1}{2}$

• Tóm lại bất phương trình vô nghiệm.

3) $|x - 2| > x + 1$ (3)

• Nếu $x \ge 2$ thì (3) $\Leftrightarrow$ $x - 2 > x + 1$ $\Leftrightarrow$ $0 > 3$ vô lí

• Nếu $x < 2$ thì (3) $\Leftrightarrow$ $-x + 2 > x + 1$ $\Leftrightarrow$ $1 > 2x$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} > x$ $\Leftrightarrow$ $x < \frac{1}{2}$ Hay $S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

4) $|x + 2| \ge x + 1$

• Nếu $x \ge -2$ $\Rightarrow$ $x + 2 \ge x + 1$ đúng với mọi $x \ge -2$

• Nếu $x < -2$ $\Rightarrow$ $-x - 2 \ge x + 1$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{3}{2} \ge x$

$S = S_1 \cup S_2$ Vậy bất phương trình có nghiệm $S = R$.

206 Giải và biện luận các phương trình theo tham số m

1) $|2x - 1| = x + m$ **2)** $|x - 1| = x + m$.

Giải

1) $|2x - 1| = x + m$ (1)

• $x \ge \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $2x - 1 = x + m$ $\Leftrightarrow$ $x = m + 1$

Điều kiện : $x = m + 1 \ge \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $m \ge -\frac{1}{2}$

• $x < \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $-2x + 1 = x + m$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{1 - m}{3}$

Điều kiện : $x = \frac{1 - m}{3} < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $m > -\frac{1}{2}$

Kết luận : * Khi $m > -\frac{1}{2}$: phương trình (1) có 2 nghiệm

$x = m + 1$ và $x = \frac{1 - m}{3}$.

* Khi $m = -\frac{1}{2}$: phương trình (1) có 1 nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

* Khi $m < -\frac{1}{2}$: phương trình (1) vô nghiệm.

2) $|x - 1| = x + m$ (2)

- $x \geq 1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x - 1 = x + m$ $\Leftrightarrow$ $0x = m + 1$ (3)

  * $m \neq -1$: phương trình (3) vô nghiệm.

  * $m = -1$: mọi $x \geq 1$ đều là nghiệm của phương trình (3).

- $x < 1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $-x + 1 = x + m$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{1 - m}{2}$ (4)

  Muốn (4) là nghiệm của (2) ta phải có $\dfrac{1 - m}{2} < 1 \Leftrightarrow m > -1$.

- Kết luận : * $m > -1$: phương trình (2) có 1 nghiệm $x = \dfrac{1 - m}{2}$.

  * $m = -1$: mọi $x \geq 1$ đều là nghiệm của phương trình (2).

  * $m < -1$: phương trình (2) vô nghiệm.

207 Giải và biện luận bất phương trình : $m(x + 4) > 3mx + 2$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $-2mx > 2 - 4m \Leftrightarrow 2mx < 4m - 2$

Biện luận : 1) $m > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x < \dfrac{4m - 2}{2m} = \dfrac{2m - 1}{m}$

2) $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x < -2$ vô lí $\Rightarrow$ vô nghiệm.

3) $m < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x > \dfrac{4m - 2}{2m} = \dfrac{2m - 1}{m}$

208 Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{mx + 1}{m - 1} > \dfrac{mx - 1}{m + 1}$ (1) $(m \neq \pm 1)$

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(mx + 1)(m + 1) - (mx - 1)(m - 1)}{(m - 1)(m + 1)} > 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2mx + 2m}{(m - 1)(m + 1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m(x + 1)}{(m - 1)(m + 1)} > 0$ (1)

m	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
m		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$m - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$m + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{m}{(m - 1)(m + 1)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Biện luận : (nhờ bảng xét dấu)

1) $-1 < m < 0 \vee m > 1$ $\left(\text{để } \dfrac{m}{(m-1)(m+1)} > 0\right)$

thì (1) $\Leftrightarrow$ $x + 1 > 0$ $\Leftrightarrow$ $x > -1$

2) $m < -1 \vee 0 < m < 1$ $\left(\text{để } \dfrac{m}{(m-1)(m+1)} < 0\right)$

thì (1) $\Leftrightarrow$ $x + 1 < 0$ $\Leftrightarrow$ $x < -1$

3) $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0 > 0$ (vô lí) $\Rightarrow$ (1) VN.

209 Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{2x + m - 1}{x + 1} > 0$ (1)

Giải

Ta có : $2x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1 - m}{2}$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1$

Để lập được bảng xét dấu, ta phải so sánh x_1, x_2.

1) Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1 - m}{2} > -1 \Leftrightarrow m < 3$.

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{1-m}{2}$		$+\infty$
$2x + m - 1$	$-$		$-$		0	$+$	
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		
VT	$+$	‖	$-$		0	$+$	

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là : $x < -1 \vee x > \dfrac{1 - m}{2}$.

2) Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1 - m}{2} < -1 \Leftrightarrow m > 3$

x	$-\infty$		$\dfrac{1-m}{2}$		-1		$+\infty$
$2x + m - 1$	$-$	0	$+$		$+$		
$x + 1$	$-$		$-$	0	$+$		
VT	$+$	0	$-$	‖	$+$		

Nghiệm của (1) là : $x < \dfrac{1 - m}{2} \vee x > -1$.

3) Nếu $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 3$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)}{(x+1)} > 0 \Leftrightarrow 2 > 0$ đúng $\forall x \neq -1$.

210 Giải và biện luận bất phương trình sau :

$$\frac{(m-3)x}{2m} > \frac{1-x}{2} - \frac{x-1}{m} \quad (\text{với } m \neq 0) \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{m-3}{2m}\right)x + \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{m} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m-1)x - m - 2}{2m} > 0 \Leftrightarrow \frac{2m-1}{2m}x > \frac{m+2}{2m}$$

Ta xét dấu biểu thức $\dfrac{2m-1}{2m}$

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2m$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2m-1}{2m}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Biện luận :

1) $\dfrac{2m-1}{2m} > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > \dfrac{1}{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow x > \dfrac{m+2}{2m-1}$

2) $\dfrac{2m-1}{2m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow x < \dfrac{m+2}{2m-1}$

3) $m = \dfrac{1}{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow 0x > \dfrac{5}{2}$ vô nghiệm.

211 Giải và biện luận bất phương trình sau : $\dfrac{mx-1}{x-m} \leq 1 \qquad (1)$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{mx-1}{x-m} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(m-1)x + m - 1}{x-m} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)(x+1)}{x-m} \leq 0 \qquad (2)$$

Biện luận :

1) $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{0(x+1)}{x-1} \le 0$ đúng $\forall x \in R\backslash\{1\}$.

2) $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-m} \le 0$

x	$-\infty$		-1		m		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-m$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	

; $(m > 1 > -1)$

Vậy (2) $\Leftrightarrow -1 \le x < m$.

3) $-1 < m < 1$ thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-m} \ge 0$

x	$-\infty$		-1		m		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-m$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-m}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy (2) $\Leftrightarrow x \le -1 \vee m < x$.

4) $m = -1$ thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+1} \ge 0$ đúng $\forall x \in R\backslash\{-1\}$.

5) $m < -1$ thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-m} \ge 0$

x	$-\infty$		m		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-m$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+1}{x-m}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Vậy (2) $\Leftrightarrow x < m \vee x \ge -1$.

212 Giải và biện luận bất phương trình : $m^2x^2 < (x+1)^2$ (1)

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (mx)^2 - (x+1)^2 < 0 \Leftrightarrow (mx + x + 1)(mx - x - 1) < 0$

$\Leftrightarrow [(m+1)x + 1][(m-1)x - 1] < 0$ (1)

Biện luận :

1) $m = -1$, bpt (1) $\Leftrightarrow$ $-2x - 1 < 0$ $\Leftrightarrow$ $x > -\frac{1}{2}$.

2) $m = 1$, bpt (1) $\Leftrightarrow$ $2x + 1 > 0$ $\Leftrightarrow$ $x > -\frac{1}{2}$.

3) $m \neq \pm 1$, để lập được bảng xét dấu, ta cần so sánh 2 nghiệm của VT

$x_1 = \frac{-1}{m+1}$ và $x_2 = \frac{1}{m-1}$

a) Nếu $x_1 > x_2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{-1}{m+1} > \frac{1}{m-1}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{(m+1)(m-1)} < 0$

m	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
m		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
m + 1		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
m − 1		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	∥	$+$	0	$-$	∥	$+$	

Vậy $x_1 > x_2$ $\Leftrightarrow$ $m < -1 \vee 0 < m < 1$

Lúc này ta lập bảng xét dấu của $[(m + 1)x + 1][(m - 1)x - 1] < 0$ như sau

α/ Khi $0 < m < 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{m-1}$		$\frac{-1}{m+1}$		$+\infty$
(m + 1)x + 1		$-$		$-$	0	$+$	
(m − 1)x − 1		$+$	0	$-$		$-$	
VT		$-$	∥	$+$	0	$-$	

Lúc này (1) có nghiệm : $x < \frac{+1}{m-1} \vee x > \frac{-1}{m+1}$.

β/ Khi $m < -1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{m-1}$		$\frac{-1}{m+1}$		$+\infty$
(m + 1)x + 1		$+$		$+$	0	$-$	
(m − 1)x − 1		$+$	0	$-$		$-$	
VT		∥	$+$	0	$-$	∥	$+$

Lúc này (1) có nghiệm $\frac{1}{m-1} < x < \frac{-1}{m+1}$.

b) Nếu $x_1 < x_2$: làm tương tự như (a).

213 Giải và biện luận : $\sqrt{x-1}\,(x - m + 2) > 0$ (1)

Giải

Điều kiện để bpt có nghĩa là $x \geq 1$. Ta xét :

1) $x = 1$, thì bpt (1) $\Leftrightarrow$ $0 > 0$ vô lí $\Rightarrow$ $x = 1$ không phải là nghiệm.

2) $x > 1$, thì bpt (1) $\Leftrightarrow$ $x - m + 2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $x > m - 2$

(So với điều kiện $x > 1$, vì ta chưa biết 1 và $m - 2$ số nào lớn) nên ta kết luận : (1) có nghiệm $x > \text{Max}\{1, m - 2\}$.

214 Định m để bất phương trình : $m(x + 1) + m^2x \geq 1 + m$ (1)

có tập nghiệm là R.

Giải

Bpt (1) $\Leftrightarrow$ $(m^2 + m)x \leq 1$ $\Leftrightarrow$ $m(m + 1)x - 1 \leq 0$

(1) có tập hợp nghiệm là R $\Leftrightarrow$ $m = 0$, $m = -1$.

215 Định m để bất phương trình : $m^2(mx - 1) < m(1 - m)x$ vô nghiệm.

Giải

Ta có : $m^2(mx - 1) < m(1 - m)x$ $\Leftrightarrow$ $m^3x - m^2 < m(1 - m)x$

$\Leftrightarrow$ $m[x(m^2 + m - 1) - m] < 0$

Khi $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0 < 0$ vô nghiệm.

216 Định m để bất phương trình : $(m + 1)x - m^2 + m + 6 > 0$ (1)

có tập nghiệm là $\{x \in R \mid x > 0\}$.

Giải

Khi $m + 1 > 0$ $\Leftrightarrow$ $m > -1$

Thì (1) có nghiệm $x > \dfrac{m^2 - m - 6}{m + 1}$

Để yêu cầu (1) có nghiệm $x > 0$. Nên để (1) có nghiệm $x > 0$ thì

$$m^2 - m - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -2 \quad \text{(loại vì } m > -1\text{)} \end{array}\right.$$

Tóm lại khi $m > 3$ thì bất phương trình (1) có nghiệm $x > 0$.

217 Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 & (1) \\ 5x + 3 \geq 8x + 21 & (2) \end{cases}$

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $2x + 1 > 3x + 4$ $\Leftrightarrow$ $x < -3$ (3)

(2) $\Leftrightarrow$ $5x + 3 \geq 8x + 21$ $\Leftrightarrow$ $x \leq -6$ (4)

Từ (3), (4) ta có nghiệm của BPT là : $x \leq -6$

* Để dễ dàng trong việc chọn nghiệm chung, ta lập bảng như sau : gạch bỏ những miền không phù hợp, miền để trắng là miền của nghiệm

x		−6	−3	
(3)				
(4)				
nghiệm chung				

Kết quả : $x \leq -6$.

218 Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} x - 1 > 2x - 3 & (1) \\ 4x - 5 > x + 7 & (2) \end{cases}$

Giải

BPT (1) cho ta $x < 2$ (3)

BPT (2) cho ta $x > 4$ (4)

Từ (3), (4) ta thấy bất phương trình vô nghiệm.

219 Giải bất phương trình : $1 < \dfrac{1+x}{1-x} \leq 2$ (1)

Giải

Điều kiện : $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

BPT (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} > 1 & (2) \\ \dfrac{1+x}{1-x} \leq 2 & (3) \end{cases}$

BPT (2) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1+x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ (4)

BPT (3) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1+x}{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{3x-1}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{3} \vee 1 < x$ (5)

Từ (4), (5) ta có nghiệm chung của bpt (1) là : $0 < x \le \frac{1}{3}$.

220 Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 2x + 3 < 18 - 3x & (1) \\ x - 2 \ge 2x + 1 & (2) \end{cases}$

Giải

BPT (1) $\Leftrightarrow$ $2x + 3 < 18 - 3x \Leftrightarrow x < 3$ (3)

BPT (2) $\Leftrightarrow$ $x - 2 \ge 2x + 1 \Leftrightarrow x \le -3$ (4)

Từ (3), (4) suy ra hệ BPT cho có nghiệm là $x \le -3$.

221 Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 2x - 3 < 3x - 4 & (1) \\ x + 8 > 3x - 2 & (2) \\ 3x - 2 > x + 2 & (3) \end{cases}$

Giải

BPT (1) $\Leftrightarrow$ $1 < x$ (4)

BTP (2) $\Leftrightarrow$ $x < 5$ (5)

BPT (3) $\Leftrightarrow$ $x > 2$ (6)

Từ (4), (5), (6) ta suy ra nghiệm của hệ bất phương trình là : $2 < x < 5$.

222 Giải bất phương trình : $-2 \le \frac{x+3}{x-7} \le 4$ (1)

Giải

TXĐ : $D = R \setminus \{7\}$

BPT (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -2 \le \frac{x+3}{x-7} & (2) \\ \frac{x+3}{x-7} \le 4 & (3) \end{cases}$

BPT (2) $\Leftrightarrow$ $0 \le \frac{3x-11}{x-7}$.

Lập bảng xét dấu :

x		$\frac{11}{3}$		7	
$3x - 11$	−	0	+		+
$x - 7$	−		−	0	+
$\frac{3x-11}{x-7}$	+	0	−		+

Vậy (2) $\Leftrightarrow$ $x \le \frac{11}{3} \vee 7 < x$

BPT (3) $\Leftrightarrow$ $\frac{-3x+31}{x-7} \le 0$

Lập bảng xét dấu :

x		7		$\frac{31}{3}$	
$-3x + 31$	+		+	0	−
$x - 7$	−	0	+		+
$\frac{-3x+31}{x-7}$	−	‖	+	0	−

BPT (3) $\Leftrightarrow$ $x < 7 \vee \frac{31}{3} \le x$

Vậy bất phương trình (1) có nghiệm là : $x < \frac{11}{3} \vee \frac{31}{3} < x$.

223 Tìm các nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình :

1) $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$

Giải

1) Ta có :

$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{44}{14} \\ x < \frac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{44}{14} < x < \frac{47}{4}$$

Vì x nguyên nên $x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

2) Ta có :

$$\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{39} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{39} < x < 2$$

Vì x nguyên nên $x = 1$.

224 Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn hệ bất phương trình :

$$(I)\ \begin{cases} \dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{3(x-2)}{8} - 1 > \dfrac{5-3x}{2} \\ 3 - \dfrac{4x-1}{18} > \dfrac{x-1}{12} - \dfrac{4-5x}{9} \end{cases}$$

Giải

Ta có : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{24}{15} \\ x < \dfrac{129}{31} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{24}{15} < x < \dfrac{129}{31}$

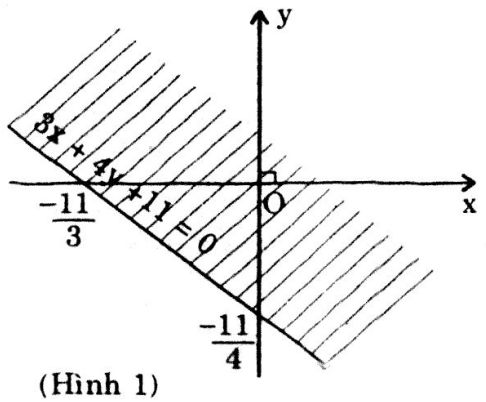
Vậy giá trị x nguyên lớn nhất là 4.

225 Giải các bất phương trình bậc nhất hai ẩn (biểu diễn các miền nghiệm trên mặt phẳng tọa độ).

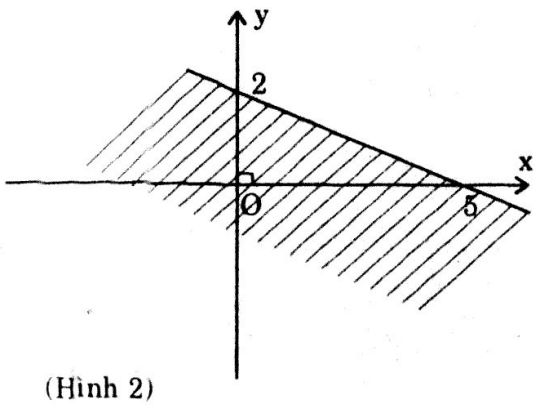
1) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$

2) $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9$.

Giải



(Hình 1)



(Hình 2)

1) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x) \Leftrightarrow 3x + 4y + 11 < 0$

Ta thế (0, 0) vào ta có : $11 > 0$

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là miền **không chứa** O(0, 0). (Hình 1).

2) $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9 \Leftrightarrow 2x + 5y - 10 > 0$

Thế (0, 0) vào VT ta có $-10 < 0$.

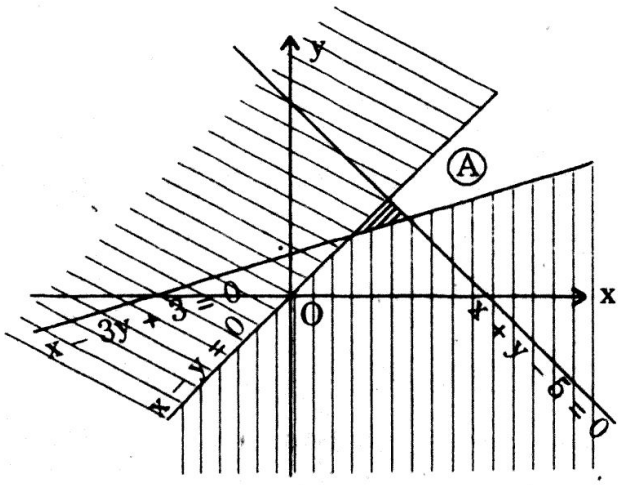
Vậy miền nghiệm của bất phương trình (2) là miền **không chứa** (0, 0). (Hình 2).

226 Giải các bất phương trình hai ẩn : $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$

Giải

Giải hệ bất phương trình (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$$



- $x - y > 0$: tập nghiệm là miền nằm dưới đường thẳng $x - y = 0$.
- $x - 3y + 3 < 0$: tập nghiệm là miền nằm bên trên đường thẳng

$$x - 3y + 3 < 0.$$

- $x + y - 5 > 0$: tập nghiệm là miền phẳng không chứa 0 có bờ là đường thẳng $x + y - 5 = 0$.
- Do đó : tập nghiệm của hệ bất phương trình là miền (A) trong hình vẽ.

Chương 6

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương trình bậc hai một ẩn số x là phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

Có biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. $\Delta < 0$: *phương trình (1) vô nghiệm.*

2. $\Delta = 0$: *phương trình (1) có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

3. $\Delta > 0$: *phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ghi chú :

1) Nếu a và c trái dấu thì ac < 0 do đó $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, *phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt.*

2) Nếu b chẵn, ta đặt b = 2b' do đó $\Delta' = b'^2 - ac$

- $\Delta' = b'^2 - ac < 0$: *pt (1) vô nghiệm.*
- $\Delta' = b'^2 - ac = 0$: *pt (1) có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.
- $\Delta' = b'^2 - ac > 0$: *pt (1) có 2 nghiệm phân biệt* $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

3) Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ *là 1 Parabol có đỉnh S*

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- *Khi* $\Delta < 0$: *Parabol không cắt trục hoành Ox.*
- *Khi* $\Delta = 0$: *Parabol tiếp xúc với trục hoành Ox.*
- *Khi* $\Delta > 0$: *Parabol cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.*

- **Định lí Viét**

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thì ta có :*

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \; ; \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

- **Định lí Viét đảo :**

Nếu 2 số thực u, v có tổng u + v = S và tích uv = P thì u, v là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0.$$

- **Bảng tóm tắt về dấu các nghiệm của phương trình (1)**

(với $\Delta = b^2 - 4ac$; $S = x_1 + x_2$; $P = x_1x_2$*)*

1) $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

2) $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

3) $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

- **Bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$**

1) $\Delta < 0 \Leftrightarrow af(x) > 0 \quad \forall x \in R$

2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow af(x) > 0 \quad \forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$

3) $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} af(x) < 0 & \forall x \in (x_1, x_2) \\ af(x) > 0 & \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \end{cases}$

với x_1, x_2 *là 2 nghiệm của* $ax^2 + bx + c = 0$.

- **So sánh 1 số α với 2 nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ của tam thức**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1) $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$

2) $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

3) $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$

227 Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{a^2}{x-m} + \frac{b^2}{x-n} = c; \quad m \neq n,\ a, b, c \neq 0.$$

Giải

Điều kiện $x \neq m$; $x \neq n$

Phương trình tương đương với :

$$-c(x-m)(x-n) + a^2(x-n) + b^2(x-m) = 0$$

Đây là phương trình bậc 2, đặt vế trái = f(x)

Ta có : $f(m)f(n) = -a^2b^2(m-n)^2 < 0 \quad (\forall a, b, m-n \neq 0)$

Do đó phương trình cho có nghiệm.

228 Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm :

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0 \quad (a \neq b \neq c \neq 0).$$

Giải

Đặt vế trái của phương trình cho là f(x). Sau khi khai triển thu gọn ta có f(x) là 1 tam thức bậc 2 theo biến số x có hệ số $a = 3 \neq 0$.

Ta lại có : $f(a) = (a-b)(a-c)$

$f(b) = (b-c)(b-a)$

$f(c) = (c-a)(c-b)$

$\Rightarrow \quad f(a)f(b)f(c) = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 < 0$

$\Rightarrow \quad 3f(a).3f(b).3f(c) < 0$

Vậy 1 trong 3 đại lượng 3f(a), 3f(b), 3f(c) phải có một hoặc cả 3 đại lượng đều âm. Do đó phương trình cho có nghiệm.

229 Chứng minh phương trình sau có nghiệm

$$ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a) = 0$$

với a, b, c đôi một khác nhau và khác 0.

Giải

Đặt vế trái của phương trình là f(x), thì f(x) sau khi khai triển thu gọn sẽ là 1 tam thức bậc hai theo x.

Ta có : $f(a) = bc(a-b)(a-c)$

$f(b) = ca(b-c)(b-a)$

$f(c) = ab(c - a)(c - b)$

$f(0) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Suy ra :

$[f(a).f(b)][f(c).f(0)] = -a^2b^2c^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a - b)(a - c)^2 \times (b - c)^2 < 0$

Vậy trong 2 đại lượng [f(a).f(b)] và [f(c).f(0)] có một đại lượng âm. Do đó phương trình cho có nghiệm.

230 Giải các phương trình sau :

1) $(x^2 - 4x + 3)^2 - (x^2 - 6x + 5)^2 = 0$ (1)

2) $(4 + x)^2 - (x - 1)^3 = (x - 1)(x^2 - 2x + 17)$ (2)

3) $1 + \dfrac{2}{x - 2} = \dfrac{-10}{x + 3} + \dfrac{50}{(2 - x)(x + 3)}$ (3)

Giải

1. (1) $\Leftrightarrow$ $[x^2 - 4x + 3 - x^2 + 6x - 5][x^2 - 4x + 3 + x^2 - 6x + 5] = 0$

$\Leftrightarrow$ $(2x - 2)(2x^2 - 10x + 8) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$

2. (2) $\Leftrightarrow$ $(4 + x)^2 - (x - 1)^3 - (x - 1)(x^2 - 2x + 17) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(4 + x)^2 - (x - 1)(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x - 17) = 0$

$\Leftrightarrow$ $16 + 8x + x^2 + 16x - 16 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x(x + 24) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$; $x = -24$.

3. (3) $\Leftrightarrow$ $x^2 + 13x + 30 = 0$

$\Delta = 13^2 - 4.30 = 169 - 120 = 49 = 7^2$

(3) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-13 - 7}{2} = -10 \\ x_2 = \dfrac{-13 + 7}{2} = -3. \end{array}\right.$

231 Định m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

1) $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$ (1)

2) $mx^2 - (2m + 1)x + m - 5 = 0$ (2)

Giải

1) Để (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow$ $\Delta' = m^2 - (m^2 - 2m + 1) > 0$ $\Leftrightarrow$ $2m - 1 > 0$ $\Leftrightarrow$ $m > \dfrac{1}{2}$.

2) Để (2) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (2m+1)^2 - 4m(m-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{24} \end{cases}$$

232 Giải và biện luận phương trình : $x^2 + (1-m)x - m = 0$ (1)

Giải

Ta có : $\Delta = (1-m)^2 + 4m = 1 - 2m + m^2 + 4m = m^2 + 2m + 1 =$

$= (m+1)^2 \geq 0 \ \forall m$

Biện luận :

- $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$: phương trình (1) có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{m-1}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1$$

- $\Delta = (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

a) $m < -1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(m+1)^2} = |m+1| = -(m+1)$

$$x_1 = \frac{m-1+m+1}{2} = m \ ; \quad x_2 = \frac{m-1-m-1}{2} = -1$$

b) $m > -1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(m+1)^2} = |m+1| = m+1$

$$x_1 = \frac{m-1-m-1}{2} = -1 \ ; \quad x_2 = \frac{m-1+m+1}{2} = m.$$

233 Giải và biện luận phương trình : $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$ (1)

Giải

1) Khi $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ thì (1) $\Leftrightarrow -6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

2) Khi $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Ta có : $\Delta' = m^2 - (m-3)(m-6) = 9m - 18$

a) $\Delta' = 9m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 2$: pt (1) vô nghiệm.

b) $\Delta' = 9m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: pt (1) có nghiệm kép $x_0 = -1$.

c) $\Delta' = 9m - 18 > 0 \Leftrightarrow m > 2$: pt (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{m \pm 3\sqrt{m-2}}{m-3}.$$

234 Giải và biện luận phương trình : $\frac{2x}{x+m} - \frac{x}{m-x} = \frac{m^2}{4(x^2-m^2)}$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $\frac{2x}{x+m} + \frac{x}{x-m} = \frac{m^2}{4(x^2-m^2)}$

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là $x \neq \pm m$.

(1) $\Leftrightarrow$ $8x(x-m) + 4x(x+m) = m^2$ $\Leftrightarrow$ $12x^2 - 4mx - m^2 = 0$

Có $\Delta' = 4m^2 + 12m^2 = 16m^2$

Biện luận :

a) Khi $\Delta' = 16m^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ m = 0 thì pt (3) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $12x^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 0 (loại vì $x \neq m = 0$)

b) Khi $\Delta' = 16m^2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $m \neq 0$, pt (3) có 2 nghiệm :

$x_1 = \frac{m}{2}$; $x_2 = -\frac{m}{6}$

Tóm lại : • Khi m = 0 pt (1) vô nghiệm

• Khi $m \neq 0$ pt (1) có 2 nghiệm $x_1 = \frac{m}{2}$; $x_2 = -\frac{m}{6}$.

235 Giải và biện luận phương trình : $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1 + bx$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $x[bx^2 - 2abx + a^2b - 4a] = 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ bx^2 - 2abx + a^2b - 4a = 0 \end{cases}$ (2)

Giải và biện luận (2), ta có :

a) b = 0, $a \neq 0$ thì (2) vô nghiệm ;

b = 0, a = 0 pt (2) vô số nghiệm.

b) $b \neq 0$ thì (2) có $\Delta' = 4ab$

$b \neq 0$, a = 0 : (2) có nghiệm x = 0

c) ab < 0 : (2) vô nghiệm

d) ab > 0 : (2) có nghiệm $x = \frac{ab \pm 2\sqrt{ab}}{b}$.

236 Giải và biện luận phương trình :

$$(m + n)x^2 - (m^2 + 4mn + n^2)x + 2mn(m + n) = 0 \qquad (1)$$

Giải

Ta có :

1) Khi $m + n = 0 \Leftrightarrow m = -n$: pt (1) $\Leftrightarrow 2m^2x = 0$

   * $m \neq 0$ thì pt (1) có 1 nghiệm $x = 0$

   * $m = 0$ thì pt (1) có vô số nghiệm

2) Khi $m + n \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -n$, thì $\Delta = (m^2 + n^2)^2$

thì pt (1) có 2 nghiệm : $x_1 = \dfrac{m^2 + 4mn + n^2 + m^2 + n^2}{2(m + n)} = m + n$

$$x_2 = \frac{2mn}{m + n}.$$

237 Chứng minh rằng nếu $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình :

$$x^2 + a_1x + b_1 = 0; \qquad x_2 + a_2x + b_2 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Giải

Phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ có $\Delta_1 = a_1^2 - 4b_1$

Phương trình $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có $\Delta_2 = a_2^2 - 4b_2$

Vậy $\Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$

Để ít nhất 1 trong 2 phương trình bậc 2 có nghiệm $\Leftrightarrow$ có ít nhất một trong 2 biệt số Δ_1, Δ_2 lớn hơn hay bằng 0 $\Leftrightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$.

Theo giả thiết ta có :

$$\Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$$

Mà $(a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geq 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \geq 2a_1a_2 - 4(b_1 + b_2) = 2[a_1a_2 - 2(b_1 + b_2)] \geq 0$

Vì $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2) \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$

Suy ra $\Delta_1 \geq 0$ hoặc $\Delta_2 \geq 0$. Hay ít nhất 1 trong 2 phương trình có nghiệm.

238 Cho $0 < a^2 + b^2 < c^2$. Chứng minh rằng phương trình :

$$ax + \frac{b}{x} = \sqrt{2}c \text{ có nghiệm.}$$

Giải

Phương trình cho tương đương với $\begin{cases} ax^2 - \sqrt{2}cx + b = 0 & (1) \\ x \neq 0 & (2) \end{cases}$

Biện luận :

1) Khi $a \neq 0$ xét pt (1) ta có $\Delta = 2c^2 - 4ab$

$\Delta \geq 2c^2 - 2(a^2 + b^2)$ vì $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\Delta \geq 2[c^2 - (a^2 + b^2)] > 0$ vì $c^2 > a^2 + b^2$

Vậy phương trình cho có hai nghiệm phân biệt, phải có một nghiệm khác 0, nên phương trình cho có nghiệm.

2) Khi $a = 0$. Thì phương trình (1) trở thành : $-\sqrt{2}cx + b = 0$ (3)

Vì giả thiết $c^2 > a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow c^2 > b^2 > 0 \Rightarrow$ b, c khác 0.

Do đó phương trình (3) có nghiệm $x = \dfrac{-b}{2\sqrt{c}} \neq 0$.

Do đó phương trình cho có nghiệm.

Tóm lại : với $0 < a^2 + b^2 < c^2$, phương trình cho luôn có nghiệm.

239 Xác định m để các pt sau có nghiệm kép và tính nghiệm kép đó :

1) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$ (1)

2) $(m + 2)x^2 + 2(3m - 2)x + m + 2 = 0$ (2)

Giải

1) Phương trình cho có $\Delta = (2m + 3)^2 - 4m^2 = 3(4m + 3)$

Để phương trình cho có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{4}$.

Khi đó phương trình cho có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{4}$.

2) Phương trình cho có hệ số $a = (m + 2)$

a) $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ thì (2). Không có nghiệm kép.

b) $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ thì (2) có $\Delta' = 8m(m - 2)$.

Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 2$.

- Với $m = 0$ phương trình (2) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.
- Với $m = 2$ phương trình (2) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$.

240 Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ (1)

a) Định m để (1) có 1 nghiệm x = 0, Tính nghiệm còn lại.

b) Định m để (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 8$

c) Tìm hệ thức liên hệ x_1 , x_2 độc lập đối với m.

Giải

a) Vì x là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $m^2 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow$ $m = 0,\ m = 3$

- Với m = 0 ta có $x_2 = 2(m-1) = -2$
- Với m = 3 ta có $x_2 = 2(3-1) = 4$

b) Ta có : $S = x_1 + x_2 = 2(m-1)$; $P = x_1 x_2 = m^2 - 3m$

Ta lại có : $8 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$

Vậy : $8 = 4(m-1)^2 - 2(m^2 - 3m) \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $m = -1,\ m = 2$

c) Ta có : $S = 2(m-1)$; $P = m^2 - 3m$

Từ $S = 2m - 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{S+2}{2}$. Thế vào P ta có :

$$P = \left(\frac{S+2}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{S+2}{2}\right) \Leftrightarrow 4P = S^2 - 2S - 8$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 8$$

Là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập đối với m cần tìm.

241 Cho phương trình : $x^2 + (m^2 - 3m)x + m^3 = 0$ (1)

a) Định m để (1) có 1 nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

b) Định m để (1) có 1 nghiệm bằng 1. Tính nghiệm còn lại.

Giải

1) Theo viết ta có: $S = x_1 + x_2 = x_2^2 + x_2 = 3m - m^2$ (vì $x_1 = x_2^2$)

$P = x_1 x_2 = x_2^2 . x_2 = m^3 \Leftrightarrow x_2 = m$

Thế vào S ta có: $m + m^2 = 3m - m^2 \Leftrightarrow m(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1$

2) Vì (1) có 1 nghiệm x = 1 nên ta có :

$1 + (m^2 - 3m) + m^3 = 0 \Leftrightarrow m^3 + m^2 - 3m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (m-1)(m^2+2m-1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -1-\sqrt{2} \\ m_3 = -1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_2 = \left(-1-\sqrt{2}\right)^3 \\ x_2 = \left(-1+\sqrt{2}\right)^3 \end{cases} \quad \text{vì } P = x_1 x_2 = m^3.$$

242 Cho phương trình : $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$ (1)

Định m để (1) có 2 nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Giải

Giả sử x_1 là nghiệm âm, x_2 là nghiệm dương thì theo đề bài ta có :

$$|x_1| > x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq 4 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2 < m < 4.$$

243 Định m để phương trình : $(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m + 3 = 0$ (1)

a) Có hai nghiệm trái dấu. **b)** Có hai nghiệm âm phân biệt.

c) Có đúng 1 nghiệm âm.

Giải

Ta có : $\Delta' = (m-3)^2 - (m-1)(m+3) = -8m + 12$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{6-2m}{m-1}, \qquad P = x_1 x_2 = \frac{m+3}{m-1}$$

a) Phương trình (1) 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad P < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{m+3}{m-1} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -3 < m < 1$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt. (đk: $m \neq 1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 12 > 0 \\ \dfrac{m+3}{m-1} > 0 \\ \dfrac{6-2m}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < -3$$

c) Xét 2 trường hợp :

* $m - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $m = 1$ phương trình (1) thành : $-4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 1$ nên $m = 1$ bị loại.

* $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, phương trình (1) có đúng 1 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 \le x_2 & (A) \\ x_1 = x_2 < 0 & (B) \end{cases}$$

Ta có (A) : $x_1 < 0 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{m-1} < 0 \\ \begin{cases} \dfrac{m+3}{m-1} = 0 \\ \dfrac{6-2m}{m-1} < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ \begin{cases} m = -3 \\ m < 1 \vee m > 3 \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3 \le m < 1$

Ta có (B) : $x_1 = x_2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 12 = 0 \\ \dfrac{6-2m}{m-1} < 0 \end{cases}$

Từ (A), (B) ta có kết quả : $-3 \le m < 1$.

244 Cho phương trình : $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$. Định m để :

1) Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

2) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt .

24

Giải

Ta có : $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4$

$$P = x_1 x_2 = \frac{m-3}{m}, \quad S = x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m}$$

1) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P = x_1 x_2 = \dfrac{m-3}{m} < 0$

Lập bảng xét dấu $\dfrac{m-3}{m} < 0$ ta có : $0 < m < 3$

2) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m + 4 > 0 \\ P = \dfrac{m-3}{m} > 0 \\ S = \dfrac{2m-4}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 3 < m < 4 \end{cases}$$

245 Cho phương trình : $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1)

1) Xác định m để phương trình (1) có 2 nghiệm.

2) Xác định m để phương trình (1) có 1 nghiệm bằng 3. Tính nghiệm còn lại.

3) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa :

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1 x_2.$$

Giải

1) Phương trình (1) có 2 nghiệm

$\Leftrightarrow \quad \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(m-2) > 0$

$\Leftrightarrow \quad -m + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < +3$ và $m \neq -1$ (để $a \neq 0$)

2) Phương trình (1) có 1 nghiệm bằng 3 . Nên ta có :

$$9(m+1) - 6(m-1) + m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{13}{4}$$

Gọi nghiệm kia là x_2. Theo Viét ta có :

$$P = x_1 x_2 = 3.x_2 = \frac{m-2}{m+1} = \frac{-\frac{13}{4} - 2}{-\frac{13}{4} + 1} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{7}{9}$$

3) Điều kiện để phương trình (1) có 2 nghiệm là $m < 3$, $m \neq -1$.

Theo Viét : $S = x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1}$; $\quad P = x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1}$

Theo giả thiết ta có : $4(x_1 + x_2) = 7x_1 x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8(m-1)}{m+1} = \frac{7(m-2)}{m+1}$

$\Rightarrow \quad m = -6.$

246 Cho phương trình : $x^2 - (m-2)x + m(m-3) = 0$ (1)

1) Xác định m để pt có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa :

$$x_1^3 + x_2^3 = 0.$$

2) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm dương là x_1 thì phương trình :

$m(m-3)x^2 - (m-2)x + 1 = 0$ cũng có 1 nghiệm dương là $\frac{1}{x_1}$.

Giải

1) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \quad \Delta > 0$

$\Leftrightarrow \quad \Delta = (m-2)^2 - 4m(m-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3m^2 + 8m + 4 > 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4 - 2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{4 + 2\sqrt{7}}{3}$ (A)

Ta có : $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \\ (m-2)^2 - 3m(m-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = \dfrac{5 - \sqrt{57}}{4} \quad , \quad m_3 = \dfrac{5 + \sqrt{57}}{4} \end{cases} \quad (B)$$

Kết hợp hai điều kiện (A) , (B) ta chỉ chọn m = 2.

2) Phương trình (1) có 1 nghiệm dương x_1 , nên :

$$x_1^2 - (m-2)x_1 + m(m-3) = 0 \qquad (2)$$

Chia hai vế của (2) cho $x_1^2 \neq 0$ ta có :

$$m(m-3)\frac{1}{x_1^2} - (m-2)\frac{1}{x_1} + 1 = 0$$

Điều này chứng tỏ rằng $\dfrac{1}{x_1}$ là nghiệm của phương trình :

$$m(m-3)X^2 - (m-2)X + 1 = 0.$$

247 Định m để phương trình : $2x^4 - 2mx^2 + m^2 - 3m - 3 = 0$ (1)

có nghiệm.

Giải

Đặt ẩn phụ : $t = x^2 \geq 0$, thì ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 2mt + m^2 - 3m - 3 = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 < 0 \leq t_2 \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 3 \leq 0 \\ \dfrac{m^2 - 3m - 3}{2} > 0 \\ m^2 - 2(m^2 - 3m - 3) \geq 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3 + \sqrt{15} \, .$$

248 Tìm a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$ax^4 - (a-3)x^2 + 3a = 0 \quad (1)$$

ĐHQG TP. HCM – khối D 1998

Giải

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $at^2 - (a-3)t + 3a = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (a-3)^2 - 4a(3a) > 0 \\ a \neq 0 \\ P = \dfrac{3a}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3-6\sqrt{3}}{11} < a < \dfrac{-3+6\sqrt{3}}{11} \\ a \neq 0 \\ 3 > 0 \\ a < 0 \vee 3 < a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3-6\sqrt{11}}{11} < a < 0.$$

249 Định m để phương trình có nghiệm duy nhất :

$$|x^2 + 2mx + 1| = x + 1 \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x^2 + 2mx + 1)^2 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + (2m-1)x = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + (2m+1)x + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow$ $x = 0 \vee x = 1 - 2m$

Vì $x = 0$ thỏa điều kiện, nên để (2) có nghiệm duy nhất là :

$$\begin{bmatrix} x = 1 - 2m = 0 \\ x = 1 - 2m < -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \vee m > 1$$

Thử lại :

a) $m = \dfrac{1}{2}$ thì hệ (3) $\Leftrightarrow$ $x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$. Nên $m = \dfrac{1}{2}$ được chọn.

b) $m > 1$ thì (3) có $af(-1) = -2m + 2 < 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x > -1$

Do đó khi $m > 1$ thì (1) có 2 nghiệm (do 2, 3 cùng có nghiệm) nên $m > 1$ (loại).

Kết luận $m = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

250 Định m để bất phương trình sau có tập nghiệm là R.

$$1 \le \frac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6 \qquad (1)$$

Giải

Vì $2x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x \in R$ (do $\Delta < 0$), nên ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 \le 3x^2 - mx + 5 \\ 3x^2 - mx + 5 < 12x^2 - 6x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m-1)x + 4 \ge 0 \\ 9x^2 + (m-6)x + 1 > 0 \end{cases}$$

- Xét : $x^2 - (m-1)x + 4 > 0, \ \forall x \Leftrightarrow \Delta_1 \le 0$

  $\Leftrightarrow (m-1)^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow (m - 1 - 4)(m - 1 + 4) \le 0$

  $\Leftrightarrow (m-5)(m+3) \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 5 \qquad (A)$

- Xét : $9x^2 + (m-6)x + 1 > 0 \ \forall x \Leftrightarrow \Delta < 0$

  $\Leftrightarrow (m-6)^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 12 \qquad (B)$

  Từ (A), (B) ta có $0 < m \le 5$.

251 Định m để phương trình : $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$

có 2 nghiệm thỏa : $x_1 < 3 < x_2$.

Giải

Ta có $x_1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow a.f(3) < 0 \Leftrightarrow 1(9 - 6m - 9 + m^2) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6.$

252 Định m để phương trình : $mx^2 + 2(m-1)x + m - 5 = 0$

có hai nghiệm thỏa : $x_1 < x_2 < 2$.

Giải

$$\text{Ta có : } x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

- $\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 5m = 3m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3} \qquad (1)$

- $af(2) = m[4m + 4m - 4 + m - 5] > 0 \Leftrightarrow m(9m - 9) > 0$

  $\Leftrightarrow m < 0 \vee m > 1 \qquad (2)$

• $\frac{S}{2} < 2 \Leftrightarrow \frac{S}{2} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{-3m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > \frac{1}{3}$ (3)

Vậy ta có : $x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \vee 1 < m \\ m < 0 \vee \frac{1}{3} < m \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 0 \vee m > 1$

Tóm lại : $x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 0 \vee 1 < m.$

253 Định m để phương trình : $mx^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$ có hai nghiệm thỏa : $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

Giải

Ta có $x_1 < 0 < x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(0) < 0 \\ af(2) > 0 \end{cases}$

Ta có • $af(0) = m(m+5) < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 0$

• $af(2) = m[4m - 4m - 4 + m + 5] > 0$

$\Leftrightarrow m(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee -1 < m$

Vậy $x_1 < 0 < x_2 < 2 \Leftrightarrow -5 < m < -1.$

254 Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m + 5 = 0$. Định m để phương trình :

a) có 2 nghiệm đều > 2. **b)** có ít nhất 1 nghiệm > 2.

Giải

a) Phương trình có 2 nghiệm đều > 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(2) > 0 \\ \frac{S}{2} - 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 5 \geq 0 \\ (m-1)(m+1) > 0 \\ \frac{-m+2}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{4} \\ m < -1 \vee m > 1 \\ 1 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{5}{4}$ (a)

b) Phương trình có ít nhất 1 nghiệm > 2 $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 2 < x_1 < x_2 & \text{(câu a)} \\ x_1 < 2 < x_2 \end{bmatrix}$

Ta có $x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow af(2) < 0$

$\Leftrightarrow (m + 1)[(m + 1)4 - 4m + m + 5] < 0$.

$\Leftrightarrow -1 < m < 1.$ (b)

Hội (a) và (b) ta có : $-1 < m \leq \frac{5}{4}$.

255 Định m để phương trình : $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ (1)

1) Có hai nghiệm trái dấu.

2) Có hai nghiệm dương phân biệt.

3) Có đúng 1 nghiệm âm.

Giải

1) (1) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P = x_1x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3.$$

2) (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-2)}{m} > 0 \\ (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \vee 3 < m < 4.$$

3) (1) có đúng 1 nghiệm âm

* Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

Vậy $m = 0$ bị loại.

* Nếu $m \neq 0$ thì (1) có đúng 1 nghiệm âm $\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow P = x_1x_2 = \frac{m-3}{m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$$

Tóm lại : $0 < m < 3$.

256 Cho phương trình : $x^2 - 6x + m - 2 = 0$ (1)

Định m để (1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Giải

(1) có 2 nghiệm dương phân biệt $(0 < x_1 < x_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m + 2 > 0 \\ P = m - 2 > 0 \\ S = \dfrac{6}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 11.$$

257 Định m để phương trình : $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0$ (1)

1) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

2) Có hai nghiệm âm phân biệt.

Giải

1) (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(m + 3)^2 - 4m^2 > 0 \\ P = 1 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 24m + 36 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2} \wedge m \neq 0.$$

2) (1) có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 24m + 36 > 0 \\ 1 > 0 \\ \dfrac{-2(m + 3)}{m} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

258 Định m để phương trình $mx^2 - 2(m - 3)x + m - 4 = 0$ (1)

có đúng 1 nghiệm dương.

Giải

* Khi $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} > 0$

Vậy $m = 0$ (nhận).

* Khi $m \neq 0$, (1) có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \leq 0 \end{cases}$

Thế số vào giải hệ bất phương trình trên ta có :

$$0 \leq m \leq 4 \vee m = \frac{9}{2}.$$

259 Cho phương trình $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$ (1)

Xác định m để (1) có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Giải

Giả sử $x_1 < 0 < x_2$, thì ta có $|x_1| > x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0$

Điều kiện đề bài $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta có kết quả $2 < m < 4$.

260 Định m để phương trình sau có nghiệm

$$mx^4 + 2(m-2)x^2 + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Giải

Đặt : $t = x^2 \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow mt^2 + 2(m-2)t + m + 1 = 0 \quad (2)$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm ≥ 0

Ta xét hai trường hợp :

* $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow -4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} > 0$.

Vậy $m = 0$ (nhận).

* $m \neq 0$ thì (2) có nghiệm $\geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 \leq 0 \leq t_2 \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \end{bmatrix}$

Thế số vào ta có kết quả $-1 \leq m \leq \frac{4}{5}$.

261 Định m để phương trình : $(m-1)x^4 + 2(m-3)x^2 + m + 3 = 0$ (1) vô nghiệm

Giải

Đặt : $t = x^2 \geq 0$, thì ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (m-1)t^2 + 2(m-3)t + m + 3 = 0 \quad (2)$$

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_2' < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta_2' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8m + 12 < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} -8m + 12 \geq 0 \\ \dfrac{m+3}{m-1} > 0 \\ \dfrac{6-2m}{m-1} < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -3 \vee m > 3.$$

262 Định m để phương trình sau đây có nghiệm :

$$|x^2 - 2x + m| = x^2 + 3x - m - 1 \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ (x^2 - 2x + m)^2 = (x^2 + 3x - m - 1)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ 5x = 2m + 1 \vee 2x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ x = \dfrac{2m+1}{5} \vee x = -1 \vee x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đặt : $f(x) = x^2 + 3x - m - 1$

$$(1) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\dfrac{2m+1}{5}\right) \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 + 9m - 9 \geq 0 \\ -m - 3 \geq 0 \\ \dfrac{3}{4} - m \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{3}{4} \\ m \leq -3 \\ m \leq -3 \\ m \leq \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\forall m$.

So sánh một số α với các nghiệm x_1, x_2 của phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

• *Xét dấu biệt số Δ, $a.f(\alpha)$ và $\frac{S}{2} - \alpha$. Rồi áp dụng kết quả :*

1) $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$

2) $x_1 \le \alpha \le x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ af(\alpha) < 0 \end{array}\right.$

3) $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{array}\right.$

4) $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{array}\right.$

5) $\alpha \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

263 So sánh số $\alpha = -1$ với các nghiệm của phương trình

$$f(x) = (m - 1)x^2 - mx - 2(m + 1) = 0 \quad (1)$$

Giải

* Khi $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $\Leftrightarrow -x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 < -1$

* Khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ta xét $\Delta = m^2 + 8(m^2 - 1) = 9m^2 - 8$

$af(\alpha) = (m - 1)f(-1) = (m - 1)(m - 1 + m - 2m - 2) = (-3)(m - 1)$

$$\frac{S}{2} - \alpha = \frac{S}{2} + 1 = \frac{m}{2(m-1)} + 1 = \frac{3m - 2}{2(m-1)}$$

Ta có bảng kết quả sau :

m	Δ	af(–1)	$\frac{S}{2}+1$	Kết luận
$+\infty$				
	+	–	+	$x_1 < -1 < x_2$
1		0		f(x) = –x – 4 có x = –4 < –1
	+	+	–	$x_1 < x_2 < -1$
$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	0			$x_1 = x_2 = -4 - 3\sqrt{2} < -1$
$\frac{2}{3}$				
$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	0			$x_1 = x_2 = -4 + 3\sqrt{2} > -1$
	+	+	+	$-1 < x_1 < x_2$
$-\infty$				

264 Tùy theo m, so sánh số 1 với các nghiệm của phương trình

$$f(x) = (3 - m)x^2 - 2(2m - 1)x - 2m + 5 \qquad (1$$

Giải

* Khi $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ thì $(1) \Leftrightarrow 10x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} < 1$$

* Khi $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$, ta có :

- $\Delta' = (2m - 5)^2 - (3 - m)(5 - 2m)$

  $= (2m - 5)(m - 2)$

- $af(1) = (3 - m)(18 - 7m)$

- $\frac{S}{2} - 1 = \frac{2(2m-1)}{2(3-m)} - 1 = \frac{3m-8}{3-m}$

Ta có bảng biện luận, kết quả sau :

m	Δ	af(+1)	$\frac{S}{2} - 1$	Kết luận
$+\infty$				
	+	+		$x_1 < x_2 < 1$
3		0		$x_1 = -\frac{1}{2} < 1 = x_2$
	+	−	+	$x_1 < 1 < x_2$
$\frac{8}{3}$			0	$x_1 = -1 - \sqrt{2}$; $x_2 = -1 + \sqrt{2} < 1$
	+	−	−	$x_1 < 1 < x_2$
$\frac{18}{7}$		0		$x_1 = -\frac{1}{3} < 1 = x_2$
	+	+	−	$x_1 < x_2 < 1$
$\frac{5}{2}$	0			$x_1 = x_2 = 0 < 1$
	−	+	−	vô nghiệm
2	0			$x_1 = x_2 = -1 < 1$
	+	+	−	$x_1 < x_2 < 1$
$-\infty$				

265 Biện luận vị trí của 2 số 0, 2 với 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình :

$$f(x) = mx^2 + 2(m - 1)x + 5 + m = 0$$

Giải

Ta có $\Delta' = (m - 1)^2 - 5m - m^2 = -7m + 1$, $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{7}$

$af(2) = m(9m + 1)$; $af(2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 ; m = -\frac{1}{9}$.

$af(0) = m(5 + m)$; $af(0) = 0 \Leftrightarrow m = -5 \vee m = 0$

$\frac{S}{2} - 0 = \frac{-m + 1}{m}$; $\frac{S}{2} - 0 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

$\frac{S}{2} - 2 = \frac{-m + 1}{m} - 2 = \frac{-3m + 1}{m}$; $\frac{S}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

Ta có bảng kết quả sau :

m	Δ	af(2)	af(0)	$\frac{S}{2}-2$	$\frac{S}{2}-0$	Kết luận
$-\infty$	+	+	+	−	−	$x_1 < x_2 < 0 < 2$
-5	0					$x_1 < x_2 = 0$
	+	+	−	−	−	$x_1 < 0 < x_2 = 2$
$-\frac{1}{9}$	0					$x_1 < 0 < x_2 = 2$
	+	−	−	−	−	$x_1 < 0 < 2 < x_2$
0	0	0				$x = \frac{5}{2} > 2$ vì $f(x) = -2x + 5$
	+	+	+	+	+	$2 < x_1 < x_2$
$\frac{1}{7}$	0					nghiệm kép $x_o = 6 > 2$
$\frac{1}{3}$				0		vì $\Delta < 0$ không có x_1, x_2
1					0	
$+\infty$						

ĐIỀU KIỆN ĐỂ TAM THỨC KHÔNG ĐỔI DẤU TRÊN R

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$; *với* $a \neq 0$

Ta có : $f(x) > 0 \quad \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

$f(x) < 0 \quad \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Nếu chưa có $a \neq 0$, *thì biện luận thêm trường hợp* $a = 0$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

266 Định m sao cho $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 2 > 0 \quad \forall x \in R$.

Giải

Ta có : $\Delta = (3m - 2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) = m^2 + 8m + 12$

Ta có : $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 2 > 0 \quad \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 8m + 12 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow -6 < m < -2.$$

267 Định m sao cho : $mx^2 - 10x - 5 \le 0 \ \forall x \in R$. (1)

Giải

1) $m = 0$, thì (1) $\Leftrightarrow -10x - 5 < 0$ chỉ đúng với $x > -\frac{1}{2}$ nên $m = 0$ (loại)

2) $m \neq 0$, thì : $mx^2 - 10x - 5 \le 0 \ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 25 + 5m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \le -5 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -5$$

Kết luận $m \le -5$.

268 Định m sao cho $\forall x \in R$ ta có : $(m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 4 > 0$ (1)

Giải

1) $m = -1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x + 4 > 0$ đúng $\forall x \in R$: do đó $m = -1$ (nhận).

2) $m \neq -1$, ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - 4(m + 1) = (m + 1)(m - 3)$

(1) đúng $\forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = m + 1 > 0 \\ \Delta' = (m + 1)(m - 3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ (m + 1)(m - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 3.$$

269 Định m sao cho $\forall x \in R$ ta có : $\dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \le m$ (1)

Giải

Ta có : $x^2 - 5x + 7 > 0$ (vì có $a = 1 > 0$, $\Delta = 25 - 28 < 0$)

(1) $\Leftrightarrow$ $2x^2 - 7x + 5 \le mx^2 - 5mx + 7m$

$\Leftrightarrow$ $(m - 2)x^2 - (5m - 7)x + 7m - 5 \ge 0$ (1)

1) Khi $m = 2$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $-3x + 9 \geq 0$ chỉ đúng khi $x \leq 3$. Do đó $m = 2$ (loại).

2) Khi $m \neq 2$, thì (1) đúng $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 2 > 0 \\ \Delta = -3m^2 + 6m + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \leq -1 \text{ hay } m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

270 Định m để $\forall x \in R$ ta có : $-9 < \dfrac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ (1)

Giải

Ta có $x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x \in R$ vì có $a = 1 > 0$; $\Delta = 1 - 4 < 0$

Nhân 2 vế của (1) cho $x^2 - x + 1 > 0$ và thu gọn ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + (m - 9)x + 3 > 0 & (2) \\ 3x^2 - (6 + m)x + 12 > 0 & (3) \end{cases}$$

* Ta có (2) đúng $\forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m - 9)^2 - 144 < 0$

$(2) \Leftrightarrow -3 < m < 21$

* Ta có (3) đúng $\forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (6 + m)^2 - 144 < 0$

$\Leftrightarrow -18 < m < 6$

Giao kết quả của (2) và (3) ta có $-3 < m < 6$.

271 Định m sao cho $\forall x \in R$ ta có : $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| \leq 2$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow -2 \leq \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1} \leq 2 \qquad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x^2 + 1) \leq x^2 + mx + 1 \\ x^2 + mx + 1 \leq 2(x^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + mx + 3 \geq 0 & (3) \\ x^2 - mx + 1 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \text{ đúng } \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 6 \qquad (5)$$

$$(4) \text{ đúng } \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2 \qquad (6)$$

Giao (5) và (6) ta có $-2 \leq m \leq 2$.

272 Định m để $\forall x \in R$ ta có : $\left|\frac{3x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 1}\right| \geq 2$ (1)

Giải

Để (1) đúng $\forall x \in R$ ta phải có $x^2 - mx + 1 \neq 0 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \quad \Delta = m^2 - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < m < 2$

Các tam thức ở tử và mẫu đều có $a > 0$ và $\Delta < 0$ nên tử và mẫu đều dương. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 1} \geq 2 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 4 \geq 2(x^2 - mx + 1) \quad \forall x \in R,$$

do $x^2 - mx + 1 > 0 \quad \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow x^2 + (1 + 2m)x + 2 \geq 0 \quad \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1 + 2m)^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

Kết luận : $\frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$ (thỏa $-2 < m < 2$).

273 Cho $f(x) = x^2 - 2mx - m$. Định m để $f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$.

Giải

$$f(x) \geq 0 \ \forall x > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta' \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \geq 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{bmatrix}$$

(vì $\Delta' > 0$ ta có : $x_1 < x_2 \leq 0$)

x		x_1		x_2	0
f(x)	+	0	−	0	+

hay ta phải có

$$f(x) \geq 0 \ \forall x > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \leq m \leq 0 \\ \begin{cases} m < -1 \vee 0 < m \\ m \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \leq m \leq 0 \\ m < -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

274 Định m để $f(x) = mx^2 - 2(m + 1)x - m + 5 > 0, \ \forall x < 1$.

Giải

* TH_1 : $m = 0$ thì $f(x) = -2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$ (thỏa đk $x < 1$)

Vậy $m = 0$ nhận được.

* TH_2 : $m \neq 0$

a) $m > 0$:

- $f(x) > 0\ \forall x < 1 \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \Delta' = 2m^2 - 3m - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1 \quad (\text{thỏa } m > 0)$$

- Nếu $\Delta' \geq 0$ ta có bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(vì $m > 0$)

Nên $f(x) > 0\ \forall x < 1 \Leftrightarrow 1 \leq x_1 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ 1 \leq \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \vee 1 \leq m \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

b) $m < 0$:

- Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow f(x) < 0\ \forall x$ không thỏa đề.
- Nếu $\Delta' \geq 0$ thì

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

thì $f(x) > 0\ \forall x < 0$ cũng vô nghiệm.

Tóm lại để $f(x) > 0\ \forall x < 1$. Ta chọn $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

275 Cho $f(x) = (m - 2)^2x^2 - 3(m - 6)x - m - 1$.

Đặt m để $f(x) < 0\ \forall x \in (-1, 0)$.

Giải

Trường hợp 1 : $m = 2$ thì $f(x) = 12x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$ thỏa $x \in (-1, 0$

Vậy $m = 2$ nhận được.

Trường hợp 2 : $m \neq 2 \Rightarrow a = (m - 2)^2 > 0$. • Do đó

* $\Delta \le 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x$ (nên loại)

* $\Delta > 0$ thì :

x	$-\infty$		x_1		-1		0		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	−		−		−	0	+	

Nên $f(x) < 0 \ \forall x \in (-1, 0) \Leftrightarrow x_1 \le -1 < 0 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(0) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 15 \le 0 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 5.$$

276 Định m để $f(x) = x^2 - mx + m + 3 \ge 0 \ \forall x \in R$.

Giải

Ta có $f(x) \ge 0 \ \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \le 0$

$$\Leftrightarrow -2 \le m \le 6.$$

277 Định m để $f(x) = mx^2 - mx - 5 < 0 \ \forall x \in R$ (1)

Giải

* Trường hợp 1 : $m = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow -5 < 0$ đúng $\forall x$. Do đó $m = 0$ (nhận được)

* Trường hợp 2 : $m \ne 0$

$$f(x) < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + 20m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -20 < m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -20 < m < 0.$$

278 Xác định m để bất phương trình : $x^2 - 2x + 1 - m^2 \le 0$

thỏa mãn với mọi x thuộc đoạn [1, 2].

(ĐH Kiến trúc 1997)

Giải

Đặt $f(x) = x^2 - 2x + 1 - m^2$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.f(1) = -m^2 \le 0 \\ 1.f(2) = 1 - m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| \ge 1.$$

279 Cho $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3$ (1)

Định m để :

1) $f(x) < 0$ vô nghiệm. **2)** $f(x) \ge 0$ có nghiệm.

Giải

1) $f(x) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$

- Nếu $m = -1$: thì (1) $\Leftrightarrow 4x - 6 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ không đúng với mọi x nên $m = -1$ (loại)

- Nếu $m \neq -1$: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ \Delta = -m^2 - m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq -2 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

2) $f(x) \geq 0$ có nghiệm : ta dùng phương pháp phủ định tức là ta định m để $f(x) \geq 0$ vô nghiệm.

$$f(x) \geq 0 \text{ vô nghiệm } \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -2 \vee 1 < m \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy để bất phương trình $f(x) \geq 0$ có nghiệm ta chọn $m \geq -2$.

280 Cho bất phương trình $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$. Định m để :

1) Bất phương trình vô nghiệm.

2) Bất phương trình có đúng 1 nghiệm.

3) Tập hợp nghiệm là một đoạn có chiều dài bằng 1.

Giải

1) $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + 6x + m + 7 > 0 \quad \forall x$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 7 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$ (vì $a = 1 > 0$).

2) $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

3) $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$ có tập hợp nghiệm là một đoạn có chiều dài bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2 \\ |x_2 - x_1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ S^2 - 4P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

281 Định m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt

$$(m - 4)x^4 - 2(m - 2)x^2 + m - 1 = 0 \quad (1)$$

Giải

Đặt : $t = x^2 \geq 0$

$(1) \Leftrightarrow \quad (m-4)t^2 - 2(m-2)t + m - 1 = 0 \qquad (2)$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt > 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$ Thế số vào ta có kết quả $0 < m < 1 \vee m > 4$.

282 Với giá trị nào của m thì phương trình :

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + 2m\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + m = 0 \quad \text{có nghiệm} \qquad (1)$$

Giải

Đặt ẩn phụ để đưa (1) về phương trình bậc 2 theo ẩn phụ.

Đặt : $t = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ có điều kiện $0 \leq t < 1 \qquad (2)$

Để (1) có nghiệm theo x $\Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt + m = 0$ có nghiệm thỏa : $0 \leq t < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \leq 0 \leq t_2 < 1 & \text{(a)} \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 < 1 & \text{(b)} \\ 0 \leq t_2 < 1 \leq t_1 & \text{(c)} \end{cases}$$

Ta có :

a) $\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < m \leq 0$

b) $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 1 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \\ 0 < -m < 1 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \\ 0 > m > -1 \\ m < 0 < 1 < m \end{cases}$ (VN)

c) $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 + 3m < 0 \end{cases}$ (loại)

Tóm lại để (1) có nghiệm, ta chọn $-\dfrac{1}{3} < m \leq 0$.

283 Định m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (1 - 3m)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3m = 0 \qquad (1)$$

Giải

Đặt : $t = x + \frac{1}{x}$

Vì x và $\frac{1}{x}$ luôn cùng dấu nên $|t| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x|\frac{1}{|x|}} \Rightarrow |t| \geq 2.$

Ta có : $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$(1) \Leftrightarrow t^2 + (1 - 3m)t + 3m - 2 = 0 \qquad (2)$

Do đó (1) có nghiệm x $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t thỏa $|t| \geq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \leq -2 \leq t_2 & (a) \\ -2 \leq t_1 \leq 2 \leq t_2 & (b) \\ t_1 \leq -2 < 2 \leq t_2 & (c) \end{cases}$$

a) $\Leftrightarrow f(-2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 2 + 6m + 3m - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$

b) $\Leftrightarrow f(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 2 - 6m + 3m - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -3m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq m$

c) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \wedge \frac{4}{3} \leq m$ vô nghiệm

Tóm lại để phương trình (1) có nghiệm x, ta cần chọn : $m \leq 0 \vee \frac{4}{3} \leq m$.

284 Định m để phương trình sau có nghiệm :

$$(x + 1)(x + 3)(x^2 + 4x + 16) = m \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 16) = m$

Đặt : $t = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1 \geq -1$

$(1) \Leftrightarrow t^2 + 13t - m = 0 \qquad (2)$

(1) có nghiệm x $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \leq -1 \leq t_2 & (a) \\ -1 \leq t_1 \leq t_2 & (b) \end{cases}$

(a) $\Leftrightarrow$ $f(-1) \le 0 \Leftrightarrow m \ge -12$

(b) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(-1) > 0 \\ \Delta \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} + 1 > 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Kết luận : để (1) có nghiệm, ta chọn $m \ge -12$.

285 Định m để phương trình sau có nghiệm

$$(m+1)(\sqrt{x}+1)^2 - 2m(\sqrt{x}+1) + 2m = 0 \quad (1)$$

Giải

Đặt : $t = \sqrt{x} + 1 \ge 1$

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $(m+1)t^2 - 2mt + 2m = 0$ (2)

Nên (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \ge 1$.

1) Nếu $m = -1$: (2) $\Leftrightarrow$ $2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa)

2) Nếu $m \ne -1$:

Để (2) có nghiệm $t \ge 1$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} af(1) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (m+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)} \\ \begin{cases} (m+1)^2 > 0 \\ -m^2 - 2m \ge 0 \\ \dfrac{m}{m+1} - 1 = \dfrac{-1}{m+1} > 0 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ -2 \le m \le 0 \\ m < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 \le m \le -1$$

Vậy để (1) có nghiệm, ta chọn $-2 \le m \le -1$.

286 Định m để phương trình có nghiệm : $\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} + \dfrac{m}{\sqrt{x}-1} + 1 = 0$ (1)

Giải

Đặt : $t = \sqrt{x} - 1 \ge -1$

(1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{m}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le t \ne 0 \\ t^2 + mt + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} t \ge -1 \text{ (vì điều kiện } t \ne 0 \text{ luôn thỏa (2))} \\ t^2 + mt + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq -1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(-1) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - m \leq 0 \\ \begin{cases} m^2 - 4 \geq 0 \\ 2 - m > 0 \\ -\dfrac{m}{2} + 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \vee m \geq 2 \end{cases}$$

Kết luận $m \leq -2$.

287 Định m để phương trình $mx^2 + (1 - m^2)x - m = 0$ (1)
có duy nhất 1 nghiệm thuộc $[2, +\infty)$.

Giải

Ta xét các trường hợp :

1) Khi $m = 0$, pt (1) $\Leftrightarrow$ $x = 0 \notin [2, +\infty)$. Vậy $m = 0$ bị loại.

2) Khi $m \neq 0$, pt (1) có 1 nghiệm duy nhất thuộc $[2, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 < 2 \leq x_2 & (2) \\ 2 \leq x_1 = x_2 & (3) \end{array}\right.$$

Vì $P = x_1x_2 = -1 < 0$ nên $\Delta > 0$.

Vậy bất phương trình (3) vô nghiệm, nên ta chỉ xét (2).

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(2) < 0 \\ \begin{cases} f(2) = 0 \\ \dfrac{S}{2} - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m(-2m^2 + 3m + 2) < 0 \\ \begin{cases} -2m^2 + 3m + 2 = 0 \\ \dfrac{m^2 - 1}{2m} - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 0 \vee m \geq 2$$

Kết luận : giá trị m cần tìm là $-\dfrac{1}{2} \leq m < 0 \vee m \geq 2$.

288 Định m để phương trình $f(x) = x^2 - 2mx + 5m - 4 = 0$ (1)
có nghiệm duy nhất 1 nghiệm thuộc $[0, 1]$.

Giải

Ta xét 3 trường hợp :

1) Phương trình có nghiệm $x = 0$ $\Leftrightarrow$ $f(0) = 5m - 4 = 0$ $\Leftrightarrow$ $m = \dfrac{4}{5}$

Khi đó $f(x) = \ldots \quad \frac{8}{5}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \in [0, 1] \\ x = \frac{8}{5} \notin [0, 1] \end{cases}$

Vậy khi $m = \frac{4}{5}$, pt (1) có 1 nghiệm duy nhất $\in [0, 1]$.

2) Phương trình có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Khi đó $f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy khi $m = 1$, pt (1) có 1 nghiệm duy nhất $\in [0, 1]$.

3) Phương trình có nghiệm duy nhất $\in (0, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 < 1 & \text{(a)} \\ 0 < x_1 < 1 < x_2 & \text{(b)} \\ 0 < x_1 = x_2 < 1 & \text{(c)} \end{cases}$$

Ta có (a) hoặc (b) $\Leftrightarrow f(0)f(1) < 0$

$$\Leftrightarrow (5m - 4)(3m - 3) < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5} < m < 1$$

Ta có (c) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5m + 4 = 0 \\ 0 < \frac{S}{2} = m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 4 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \varnothing$ (không có m nào thỏa (c))

Kết luận : $\frac{4}{5} \le m \le 1$.

289 Định m sao cho $f(x) = 2x^2 - (3m - 1)x - 3(m + 3) \le 0 \quad \forall x \in [-2, 1]$.

Giải

Ta có $\Delta = (3m - 1)^2 + 24(m + 3) = 9m^2 + 18m + 73 > 0 \quad \forall m \in R$

Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

$f(x) \le 0 \ \forall x \in [-2, 1] \Leftrightarrow [-2, 1] \subset [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \le -2 < 1 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(-2) \le 0 \\ 2f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 3 \le 0 \\ -6m - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1.$$

290 Cho phương trình : $(3 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$

Tìm những giá trị của m để :

1) Phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 1.

2) Phương trình có 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1, 3)$ còn nghiệm kia lớn hơn 3.

Giải

1) Ta có :

$$x_1 \le x_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m - 6 \ge 0 \\ (3 - m)(2m + 5) > 0 \\ \dfrac{-3}{3 - m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{3}{2} \\ m \ge 2 \end{array}\right. \\ -\dfrac{5}{2} < m < 3 \\ m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right] \cup [2, +3).$$

2. Ta có : $-1 < x_1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(3) < 0 \\ af(-1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3 - m)(-2m + 29) < 0 \\ (3 - m)(-2m + 5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m < \dfrac{29}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{5}{2} \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3 < m < \frac{29}{2}.$$

Chương 7

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

291 Giải các hệ phương trình :

1) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = 24 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

Giải

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow$ $x = 4 - 2y$, thế vào (1) ta có:

(1) $\Rightarrow$ $(4 - 2y)^2 + 4y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ phương trình (1) có 1 nghiệm là (2, 1).

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - xy = 24 & (1) \\ 2x - 3y = 1 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x = \dfrac{1 + 3y}{2}$, thế vào (1) ta có (1) $\Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 95 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -\dfrac{19}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -9 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (2) có hai nghiệm (8, 5) và $\left(-9, -\dfrac{19}{3}\right)$.

292 Giải các hệ phương trình :

1) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases}$

Giải

1) Giải hệ $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 & (1) \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow$ $y = 2x - 3$, thế vào (1) ta có:

(1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 3x(2x - 3) + (2x - 3)^2 + 2x + 3(2x - 3) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$

Vậy $y_1 = 3, y_2 = 1$.

Nên hệ phương trình (1) có 2 nghiệm (3, 3), (2, 1).

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(x-y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84\end{cases}$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x - y = 7 \\ 3x + 4y = 84\end{cases} \\ \begin{cases}x - y = -7 \\ 3x + 4y = 84\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(16, 9) \\ (8, 15)\end{cases}$$

293 Giải các hệ phương trình :

1) $\begin{cases}x - y = 9 \\ xy = 90\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}x^2 + y^2 = 164 \\ x - y = 2\end{cases}$

Giải

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x - y = 9 & (1) \\ xy = 90 & (2)\end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow$ $x = y + 9$ thế vào (2) ta có :

$$(2) \Leftrightarrow (y + 9)y = 90 \Leftrightarrow y^2 + 9y - 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y_1 = -15 \\ y_2 = 6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -6 \\ x_2 = 15\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (1) có 2 nghiệm là (–6, –15), (15, 6).

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2 + y^2 = 164 & (1) \\ x - y = 2 & (2)\end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow$ $x = y + 2$. Thế vào (1), ta có :

$$(1) \Rightarrow (y + 2)^2 + y^2 = 164 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y_1 = -10 \\ y_2 = 8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -8 \\ x_2 = 10\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (2) có 2 nghiệm (–8, –10) , (10, 8).

294 Giải hệ phương trình : $\begin{cases}xy - x + y = -3 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6\end{cases}$

Giải

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy - x + y = -3 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6 \end{cases}$ (I)

Đặt : $t = -x$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} t + y - ty = -3 \\ t^2 + y^2 + t + y - ty = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + y - ty = -3 \\ (t + y)^2 - 3ty + t + y = 6 \end{cases}$$

* Với $\begin{cases} S = t + y \\ P = ty \end{cases}$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} S - P = -3 \\ S^2 + S - 3P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 3P = 6 \\ P = S + 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad S^2 + S - 3(S + 3) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad S^2 - 2S - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_1 = -3 \\ S_2 = 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 = 0 \\ P_2 = 8 \end{bmatrix}$$

* Với $S_1 = -3$, $P_1 = 0$: thì t , y là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 3X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = 0, \ X_2 = 3$$

Vậy (0, −3), (3, 0) là nghiệm của (I).

* Với $S_2 = 5$, $P_2 = 8$: thì t, y là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 5X + 8 = 0 \quad \text{(VN)}.$$

295 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 4 \\ x(x - y + 1) + y(y - 1) = 2 \end{cases}$

Giải

Tương tự bài trên ta đặt $t = -y$. Và $S = x + t$, $P = tx$

Giải ta có kết quả : $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; (1, 2) và (−2, −1).

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 1

1) ***Dạng*** $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

Trong đó khi hoán vị x, y thì từng phương trình không đổi.

2) ***Cách giải :***

Đặt $S = x + y$, $P = xy$, thế S và P vào hệ cho, giải hệ này tìm S, P.

Thì x, y là nghiệm của phương trình : $X^2 - SX + P = 0$ (2)

Ta có 3 khả năng :

a) *Nếu (2) có* $\Delta = S^2 - 4P > 0$ *: hệ phương trình cho có hai nghiệm*

b) *Nếu (2) có* $\Delta = S^2 - 4P = 0$ *: hệ phương trình cho có một nghiệm*

c) *Nếu (2) có* $\Delta = S^2 - 4P < 0$ *: hệ phương trình cho vô nghiệm.*

296 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$ (A)

Giải

Đặt : $S = x + y,\ P = xy$

$$(A) \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 10 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$$

Vậy x, y là 2 nghiệm của phương trình : $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = 1 \\ X_2 = 3 \end{array}\right.$

Do đó hệ phương trình (A) có 2 nghiệm (1, 3) ; (3, 1).

297 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$ (A)

Giải

Đặt : $S = x + y,\quad P = xy$

Ta có : $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 24 = 49 \quad \Rightarrow x + y = \pm 7$

$$(A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 7 \\ P = 12 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} S = -7 \\ P = 12 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

* Với S = 7, P = 12 thì x, y là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 7X + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

* Với S = −7, P = 12 thì x, y là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 + 7X + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình cho có 4 nghiệm :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

298 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x-1)(y-1) = 18 \end{cases}$

Giải

Đặt : $S = x + y,\ P = xy$

Ta có : $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Mà : $(x - 1)(y - 1) = 18 \Leftrightarrow xy - (x + y) + 1 = 18$

$\Leftrightarrow xy = (x + y) + 17$

Vậy : $(x + y)^2 = 65 + 2\,[(x + y) + 17]$

$\Rightarrow S^2 - 2S - 99 = 0 \Leftrightarrow S_1 = -9,\quad S_2 = 11$

$\Rightarrow P_1 = 8,\quad P_2 = 28$

* Với $S_1 = -9,\ P_1 = 8$ thì x, y là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 + 9X + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -8 \\ y = -1 \end{cases}$$

* Với $S_2 = 11,\ P_2 = 28$ thì x, y là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2 - 11X + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình cho 4 nghiệm:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -8 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

299 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$ (A)

Giải

Đặt : $S = x + y,\quad P = xy$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 6 = 0 \\ P = 2 - S \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases} \text{ loại vì } S^2 - 4P < 0 \\ \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy x, y là 2 nghiệm của phương trình : $X^2 - 2X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình cho có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

300 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$ (A)

Giải

Đặt : $S = x + y, P + xy$

$$\begin{cases} S = 6 \\ S^2 - 2P = 2P + 4 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases}$$

Vậy x, y là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

301 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$ (A)

Giải

Đặt : $S = x + y, P = xy.$ Điều kiện ! $x \neq 0, y \neq 0$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S^2 - 2P}{P} = \dfrac{13}{6} & (1) \\ S = 5 & (2) \end{cases}$$ điều kiện $xy \neq 0$

Thay S = 5 vào (1) ta có P = 6.

Vậy x, y là 2 nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

302 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$ (A)

Giải

Đặt : $S = x + y, P = xy$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 6 \\ P + S = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} P = 2 \\ S = 3 \end{cases}$$

1) S = 2 , P = 3 thì x, y là nghiệm của phương trình :

$X^2 - 2X + 3 = 0$ vô nghiệm vì có $\Delta < 0$

2) S = 3 , P = 2 thì x, y là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

303 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$

1) Giải hệ với a = 1.

2) Tìm các giá trị của a để hệ có đúng hai nghiệm.

Giải

1) Với a = 1 :

Ta có : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 4 \\ (x + y) = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 2 \\ xy = 0 \end{cases}$

* Với S = 2, P = 0 thì xy là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

* Với S = − 2, P = 0 thì x, y là nghiệm của phương trình :

$$X^2 + 2X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy khi a = 1 , hệ phương trình cho có 4 nghiệm :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

2) Tìm a để hệ phương trình có đúng 2 nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 2(1 + a) \\ x + y = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 - a \\ x + y = \pm 2 \end{cases}$$

Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là :

$$S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4(1 - a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

Vậy x, y là nghiệm của 2 phương trình $\begin{cases} X^2 - 2X + 1 - a = 0 & \text{có } \Delta'_1 = a \\ X^2 + 2X + 1 - a = 0 & \text{có } \Delta_2 = a \end{cases}$

Vì cả 2 phương trình đều có $\Delta' = a$ nên 2 phương trình có 4 nghiệm khác nhau $X_1 = 1 \pm \sqrt{a}, X_2 = -1 \pm \sqrt{a}$ khi a > 0 (do đó hệ phương trình có 4 nghiệm).

Nên để hệ phương trình chỉ có đúng 2 nghiệm thì a = 0.

Lúc đó $X_1 = x = y = 1$, $X_2 = x = y = -1$

Hay : Khi a = 0 hệ phương trình cho có đúng 2 nghiệm là (1, 1), (−1, −1).

304 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + xy + y = a + 1 \\ x^2y + y^2x = a \end{cases}$ (A)

Định a để hệ có ít nhất 1 nghiệm (x, y) thỏa điều kiện $x > 0, y > 0$.

Giải

Đặt : $S = x + y, \quad P = xy$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = a + 1 \\ SP = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = a \\ P = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 1 \\ P = a \end{cases}$$

1) Với $\begin{cases} S = a \\ P = 1 \end{cases}$ Điều kiện để hệ có nghiệm (x, y) thỏa $x > 0, y > 0$ là :

$$\begin{cases} S^2 - 4P \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 \geq 0 \\ a > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2 \vee 2 \leq a \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2$$

2) Với $\begin{cases} S = 1 \\ P = a \end{cases}$ Điều kiện để hệ có nghiệm (x, y) thỏa $x > 0, y > 0$ là :

$$\begin{cases} S^2 - 4P \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a \geq 0 \\ 1 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{4} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}$$

Đáp số : $a \geq 2 \vee 0 < a \leq \frac{1}{4}$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2

a) Dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases}$ ***(I)***

Như vậy khi hoán vị x và y thì phương trình (1) biến thành phương trình (2) và ngược lại.

b) Cách giải : *thường dùng 1 trong 2 cách*

* *Cách 1: Ta có (I)* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(x, y) - f(y, x) = 0 \end{cases}$

* *Cách 2: Ta có (I)* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) + f(y, x) = 0 \end{cases}$

305 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y & (1) \\ y^2 = 3y + 2x & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ (x - y)[x + y - 1] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x^2 = 3x + 2y \end{cases} & (A) \\ \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 = 3x + 2y \end{cases} & (B) \end{cases}$$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 = 3x + 2(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình cho có 4 nghiệm: (0, 0), (5, 5), (−1, 2), (2, −1).

306 Giải hệ phương trình : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y & (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x & (2) \end{cases}$

Giải

Trừ (1) cho (2) vế theo vế ta có :

$$3(x^2 - y^2) = x - y \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Do đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \quad (1) \end{cases} & (A) \\ \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = -3(x + y) \quad (\text{do } 1 + 2) \end{cases} & (B) \end{cases}$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ -x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$$

$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ xy = \dfrac{5}{9} \end{cases}$ không thỏa $S^2 - 4P \geq 0$ nên vô nghiệm.

Kết luận hệ phương trình (I) có 2 nghiệm (0, 0) , (−3, −3).

307 Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases} x^3 = 2x + y & (1) \\ y^3 = 2y + x & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta có :

$(x - y)[x^2 + y^2 + xy] = x - y \Leftrightarrow (x - y)[x^2 + y^2 + xy - 1] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = y \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{bmatrix}$$

Ta có 2 trường hợp :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = y \\ x^3 = 2x + y \end{cases} & (A) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ (x + y)[x^2 + y^2 - xy - 3] = 0, \text{ do } (1 + 2) \end{cases} & (B) \end{bmatrix}$$

$(A) \Leftrightarrow x^3 = 3x \Leftrightarrow x[x^2 - 3] = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$

Vậy (A) có 3 nghiệm $(0, 0)$; $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ (x + y)[x^2 + y^2 - xy - 3] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 \\ S[S^2 - 3P - 3] = 0 \end{cases}$$

$$(B) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} S = 0 \\ S^2 - P - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} S^2 - 3P - 3 = 0 \\ S^2 - P - 1 = 0 \end{cases} \end{bmatrix}$$

- Với $\begin{cases} S = 0 \\ S^2 - P - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Với $\begin{cases} S^2 - 3P - 3 = 0 \\ S^2 - P - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases}$ giải như trên.

Kết luận : hệ phương trình cho có 5 nghiệm :

$$(0, 0);\ (\sqrt{3}, \sqrt{3});\ (-\sqrt{3}, -\sqrt{3});\ (1, -1);\ (-1, 1).$$

308 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 = 3y - 1 \ (1) \\ y^2 = 3x - 1 \ (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Lấy (1) trừ (2) ta có : $(x - y)(x + y) = 3(y - x)$

$$\Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x = y \\ x + y + 3 = 0 \end{bmatrix}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = y \\ y^2 = 3x - 1 \end{cases} & (A) \\ \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y^2 = 3x - 1 \end{cases} & (B) \end{bmatrix}$$

$$(A) \Leftrightarrow \ y^2 - 3y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ y_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy (A) có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(y + 3) \\ y^2 = -3(y + 3) - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 3y + 10 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Tóm lại hệ phương trình cho có 2 nghiệm :

$$x = y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

309 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} & (1) \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Cả 2 vế phải $> 0 \quad \Rightarrow \quad$ điều kiện $x > 0, y > 0$

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy(x - y) = (y - x)(y + x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = y\\ 3yx^2 = y^2 + 2\end{cases}\\ \begin{cases}3xy + x + xy = 0 \text{ (loại vì } x > 0, y > 0)\\ 3yx^2 = y^2 + 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x = y = 1$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là $\begin{cases}x = 1\\ y = 1\end{cases}$.

310 Định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$(I)\ \begin{cases}x^2 = y^3 - 4y^2 + my & (1)\\ y^2 = x^3 - 4x^2 + mx & (2)\end{cases}$$

Giải

Ta thấy rằng nếu hệ có nghiệm (x_o, y_o) thì hệ cũng có nghiệm (y_o, x_o).

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất ta phải có $x_o = y_o$.

Thế $x_o = y_o$ vào (2) ta có : $x_o^2 = x_o^3 - 4x_o^2 + mx_o$

$$\Leftrightarrow \quad x_o(x_o^2 - 5x_o + m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll}x_o = 0 & (3)\\ x_o^2 - 5x_o + m = 0 & (4)\end{array}\right.$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì (4) phải vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x_o = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta = 25 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{25}{4}\\ \left\{\begin{array}{l}\Delta = 25 - 4m = 0\\ x_o = 0 \neq +\dfrac{5}{2} = -\dfrac{b}{2a}\end{array}\right\} \text{ vô nghiệm}\end{array}\right.$$

* Đảo lại, nếu $m > \dfrac{25}{4}$ thì hệ phương trình cho ta :

$$(1) - (2) \Rightarrow x^2 - y^2 = y^3 - x^3 - 4(y^2 - x^2) + m(y - x)$$

$$\Leftrightarrow y^3 - x^3 - 3(y^2 - x^2) + m(y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x)[y^2 + x^2 + xy - 3(x + y) + m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}y - x = 0 & (5)\\ y^2 + x^2 + xy - 3(x + y) + m = 0 & (6)\end{array}\right.$$

$$(6) \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y + m = 0$$

(đây là phương trình bậc hai đối với x)

có $\Delta_1 = -3y^2 + 6y + 9 - 4m = -3(y^2 - 2y + 1) + 12 - 4m$

$= -3(y - 1)^2 + 12 - 4m < 0 \quad (\text{vì } m > \frac{25}{4})$

vậy (6) vô nghiệm.

Vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ y^2 = x^3 - 4x^2 + mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hệ có nghiệm duy nhất

Tóm lại : để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất ta chọn $m > \frac{25}{4}$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

a) Đa thức P(x, y) được gọi là đẳng cấp bậc hai, khi mọi đơn thức trong nó đều bậc 2. Khi đó phương trình P(x, y) = k (hằng số) được gọi là phương trình đẳng cấp bậc hai.

Một hệ phương trình được gọi là đẳng cấp bậc hai khi các phương trình của hệ đều đẳng cấp bậc 2.

b) Phương pháp giải :

- *Xét riêng trường hợp x = 0.*
- *Khi $x \neq 0$. Đặt y = tx, thế vào hệ, chia vế cho vế của 2 phương trình rồi suy ra k. Từ đó tìm x, y.*

c) Tính chất của nghiệm :

Ta chứng minh được rằng khi 1 hệ phương trình đẳng cấp bậc 2, thì hệ đó có nghiệm dạng $(0, y_o)$; (x_o, kx_o).

d) Để hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ Tìm được k.

311 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 & (1) \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 3 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

* Với x = 0 thì phương trình (1) $\Rightarrow y^2 = -1$ (VN). Do đó hệ (I) vô nghiệm.

* Với $x \neq 0$. Đặt y = tx. Thế vào hệ (I) ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3tx^2 + t^2x^2 = -1 \\ 3x^2 - tx^2 + 3t^2x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(t^2 - 3t + 1) = -1 & (3) \\ x^2(3t^2 - t + 3) = 3 & (4) \end{cases}$$

Chia (3) cho (4) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{t^2-3t+1}{3t^2-t+3}=-\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2t^2-5t+2=0 \\ 3t^2-t+3\neq 0 \quad \text{vì } \Delta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad t=2 \vee t=\frac{1}{2}$$

- Với t = 2. Thế vào (3), (4) $\Rightarrow \quad \begin{cases} x^2=1 \quad (\text{do } 3) \\ y=2x \quad (\text{do } t=2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

- Với $t=\dfrac{1}{2}$. Thế vào (3), (4) ta có : $\begin{cases} x^2=4 \quad (\text{do } 3) \\ y=\dfrac{1}{2}x \quad \left(\text{do } t=\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình (I) có 4 nghiệm (1, 2); (–1, –2); (2, 1); (–2, –1).

312 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x^2-2xy=16 & (1) \\ x^2-3xy-2y^2=8 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

* Vì x = 0 không phải là nghiệm của hệ.

* Đặt x = ky. Thay vào hệ ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2y^2-2ky^2=16 \\ k^2y^2-3ky^2-2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3k^2-2k)y^2=16 & (3) \\ (k^2-3k-2)y^2=8 & (4) \end{cases}$$

(3) chia (4) vế theo vế ta có : $\dfrac{3k^2-2k}{k^2-3k-2}=2$

$$\Leftrightarrow \quad k^2+4k+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (k+2)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=-2$$

Vậy x = –2y. Thế vào (1) ta có : $16y^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm 1$

Nên hệ (I) có 2 nghiệm là (–2, 1) ; (2, –1).

313 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x^2-5xy-4y^2=-3 & (1) \\ 9y^2+11xy-\ldots^2=6 & (2) \end{cases}$ (I)

ĐH Kiến trúc TP. HCM – 1996

Giải

* Vì x = 0 không phải là nghiệm của hệ vì $\begin{cases} y^2 = \dfrac{3}{4} \\ y^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ (VN).

* Với $x \neq 0$. Đặt : $y = kx$. (I) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2(3 - 5k - 4k^2) = -3 & (3) \\ x^2(-8 + 11k + 9k^2) = 6 & (4) \end{cases}$

Lấy (4) chia (3) vế theo vế ta có :

$$\frac{9k^2 + 11k - 8}{-4k^2 - 5k + 3} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + k - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -2 \end{array}\right.$$

• Khi k = 1. Ta có: $x^2(3 - 5 - 4) = -3$ (do (3))

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

• Khi k = −2. Ta có : $x^2(3 + 10 - 16) = -3$ (do 3)

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$$

Tóm lại hệ phương trình cho có 4 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

314 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 & (1) \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 & (2) \end{cases}$

Giải

* Với x = 0, phương trình (1) cho : $y^2 = -\dfrac{38}{4}$ VN $\Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

* Với $x \neq 0$. Đặt : $y = kx$ thế vào hệ ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(-4t^2 + 5t + 3) = 38 & (3) \\ x^2(-3t^2 - 9t + 5) = 15 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3t^2 - 9t + 5}{-4t^2 + 5t + 3} = \frac{15}{38}$$

$$\Leftrightarrow \quad -54t^2 - 417t + 145 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{145}{18} \end{array}\right.$$

- Với $t = -\dfrac{145}{8}$ ta có : $-4t^2 + 5t + 3 < 0 \quad \Rightarrow$ (3) VN $\Rightarrow$ hệ VN
- Với $t = \dfrac{1}{3}$ từ (3) $\Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$

Vậy hệ (I) có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

Kết luận : hệ phương trình có 2 nghiệm là (3, 1) ; (–3, –1).

315 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 & (1) \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

* Vì $x = 0 = y$ là 1 nghiệm của hệ.

* Với $x \neq 0 ; y \neq 0$

Nhân (1) cho 5, nhân (2) cho 3 ta có : $\begin{cases} 15x^2 - 40xy + 20y^2 = 0 & (3) \\ 15x^2 - 21xy - 18y^2 = 0 & (4) \end{cases}$

Lấy (3) – (4) ta được : $2y^2 - xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2y - x) = 0$

$\Rightarrow$ $2y = x$ là phương trình bậc nhất có vô số nghiệm thuộc R

Kết hợp với nghiệm $x = y = 0$, ta có nghiệm của hệ là $(2y, y)$, với mọi $y \in R$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

316 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$ (I)

Giải

Đặt $u = x^2 - 3x$, $v = y^2 + 4y$. Ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u + v = 1 \\ 3u - 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3x = 1 \\ y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, 0\right) \text{ và } \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, -4\right)$$

317 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 & (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Từ (2) $\Rightarrow$ $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ (do (1))

Chia 2 phương trình cho $x^2 \neq 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = 6 \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 6 \\ \left(\dfrac{1}{x} + y\right)^2 - 2\dfrac{1}{x}y = 5 \end{cases}$$

Suy ra : $\left[\left(\dfrac{1}{x} + y\right)^2 - 5\right]\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 12$

Đặt $t = \dfrac{1}{x} + y$ ta có : $t^3 - 5t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t^2 + 3t + 4) = 0$

$\Leftrightarrow t = 3$

Vậy $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 3 \\ \dfrac{1}{x}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 1, y = 2 \\ \dfrac{1}{x} = 2, y = 1 \end{cases}$

Hệ phương trình có 2 nghiệm là (1, 2) ; $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

318 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$ (I)

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{y - x}{xy} \quad (đk\ xy \neq 0) \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = x \neq 0 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \begin{cases} xy = -1 \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = x \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} xy = -1 \\ \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} = VN \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x \\ (x-1)(x^2+x-1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

319 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 & (1) \\ y + xy^2 = -6x^2 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Từ (1), (2) $\Rightarrow x \neq 0, y \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow (1 + xy)y = -6x^2 \Leftrightarrow 1 + xy = \frac{-6x^2}{y} \qquad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 + xy)[1 - xy + x^2y^2] = 19x^3 \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta có :

$$\frac{-6x^2}{y}[1 - xy + x^2y^2] = 19x^3 \Leftrightarrow 1 - xy + (xy)^2 = \frac{-19}{6}xy$$

$$\Leftrightarrow (xy)^2 + \frac{13}{6}(xy) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -\dfrac{2}{3} \\ xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = -\dfrac{2}{3} \\ 1 + (xy)^3 = 19x^3 \\ y(1 + xy) = -6x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = -\dfrac{3}{2} \\ 1 + (xy)^3 = 19x^3 \\ y(1 + xy) = -6x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = -\dfrac{2}{3} \\ x^3 = \dfrac{1}{27} \\ y = -18x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = -\dfrac{3}{2} \\ x^3 = -\dfrac{1}{8} \\ y = 12x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

320 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 2yx + 6x - 27 = 0 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

Xem pt (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - (5y)x + 6y^2 = 0$ (pt bậc 2 theo x)

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x = 3y \\ x = 2y \end{bmatrix} \text{ lần lượt thế vào phương trình (2)}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 4y^2 + 6y - 9 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ 20y^2 + 12y - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9 - 9\sqrt{15}}{4} \\ y = \dfrac{-3 - 3\sqrt{15}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-9 + 9\sqrt{15}}{4} \\ y = \dfrac{-3 + 3\sqrt{15}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{9}{5} \\ y = \dfrac{9}{10} \end{cases}.$$

321 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^4 + y^4 = 1 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ (2) $\Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1$

* Nếu $x < 0$ thì (1) $\Rightarrow \quad y^3 = 1 - x^3 > 1 \Rightarrow \quad y > 1$ mâu thuẫn với (3)

Vậy $0 \le x \le 1$. Tương tự ta cũng có $0 \le y \le 1$.

* Từ (1), (2) $\Leftrightarrow (x^3 - x^4) + (y^3 - y^4) = 0 \Leftrightarrow x^3(1 - x) + y^3(1 - y) = 0 \qquad (4)$

Do $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ nên ta có $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(1 - x) = 0 \\ y^3(1 - y) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)

So sánh với (1) ta chỉ chọn 2 nghiệm (0, 1), (1, 0).

322 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 & (1) \\ xy(x - y) = 2 & (2) \end{cases}$ (I)

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 7 & (1) \\ xy(x - y) = 2 & (2) \end{cases}$$

Vì $\begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}$ không phải là nghiệm của hệ phương trình nên ta lấy (1) chia (2) vế theo vế :

$$\frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x - y)} = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + xy + y^2 = \frac{7}{2}xy$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 2x \\ x = 2y \end{bmatrix}$$

* Nếu $y = 2x$ thế vào (2) ta có $x^3 = -1 \Rightarrow (-1, -2)$

* Nếu $x = 2y$ thế vào (2) ta có $y^3 = 1 \Rightarrow (2, 1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-1, -2)$; $(2, 1)$.

323 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases}$ (I)

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y) + 3xy = 19(x - y)^2 \\ (x - y)^2 + xy = 7(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x - y)^2 = xy \\ 7(x - y)^2 = 7(x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x - y)^2 = xy \\ (x - y)(x - y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = y \\ xy = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y + 1 \\ xy = 6 \end{cases} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm là $(0, 0)$, $(-2, -3)$, $(3, 2)$.

324 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$ (I)

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 6x - 4y = 32 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y - 65 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3x - 2y - 16 = 0 \\ (x + y + 5)(x + y - 13) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} xy - 3x - 2y - 16 = 0 \\ x = -y - 5 \end{cases} & (A) \\ \begin{cases} xy - 3x - 2y - 16 = 0 \\ x = 13 - y \end{cases} & (B) \end{bmatrix}$$

Giải (A) ta có $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{3} - 3 \\ y = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$

Giải (B) ta có $\begin{cases} y^2 - 4y + 55 = 0 \\ x = 13 - y \end{cases}$ vô nghiệm.

325 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x & (1) \\ x(x^2 + y^2) = 10y & (2) \end{cases}$

Giải

* Nếu $x = 0$ thì (2) $\Rightarrow$ $y = 0$. Vậy (0, 0) là 1 nghiệm của hệ.

* Nếu $x \neq 0$ thì (2) $\Rightarrow$ $y \neq 0$. Do đó ta chia 2 vế của (1) cho (2) thì

$$\frac{2y}{x}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{3}{10}\cdot\frac{x}{y} \quad\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow\quad 20\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]=3 \qquad (3)$$

Đặt $k=\left(\frac{y}{x}\right)^2 > 0$ thì (3) $\Leftrightarrow$ $20k(1-k)=3(1+k)$

$\Leftrightarrow$ $20k^2-17k+3=0$ $\Leftrightarrow$ $k=\frac{1}{4}\vee k=\frac{3}{5}$.

a) $k=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$ từ (2) $\Rightarrow xy>0$. Do đó $x = 2y$, thay vào (2) ta có :

$2y(4y^2+y^2)=10y \quad\Leftrightarrow\quad 10y^3=10y \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm 1$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (2, 1), (–2, –1).

b) $k=\frac{3}{5}\Rightarrow \quad y=\pm x\sqrt{\frac{3}{5}} \quad\Rightarrow\quad y=x\sqrt{\frac{3}{5}}$ thế vào (2)

Ta có $\quad x=\pm\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm :

$$\left(\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\frac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right);\left(-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}},-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^3}\right).$$

Tóm lại hệ phương trình cho có 5 nghiệm là :

$$(0,0),(2,1),(-2,-1),\left(\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}},\frac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right);\left(-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}},-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^3}\right).$$

326 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3} \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ (I)

Giải

Điều kiện $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3} & (3) \\ \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{6} & (4) \quad (\text{do } (1) - (2)) \end{cases}$$

Đặt $t = \dfrac{y}{x}$ thay vào (4) $\Rightarrow \quad t - \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \quad 6t^2 - 5t - 6 = 0$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{3}{2}, \; t_2 = -\frac{3}{2}$$

* $t = \dfrac{3}{2}$ thì (3) $\Leftrightarrow$ $xy = 6$. Do đó ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2} \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

* $t = -\dfrac{2}{3}$ thì (3) $\Leftrightarrow$ $xy = \dfrac{23}{6}$. Do đó :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{3} \\ xy = \dfrac{23}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -2x \\ xy = \dfrac{23}{6} \end{cases}$$ hệ vô nghiệm.

Kết luận : Hệ có đúng 2 nghiệm (2, 3), (–2, –3).

327 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases}$ (I)

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x(y+1) + (y+1) = 2 \\ y(z+1) + (z+1) = 5 \\ z(x+1) + (x+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 & (1) \\ (y+1)(z+1) = 5 & (2) \\ (z+1)(x+1) = 10 & (3) \end{cases}$$

Nhân ba phương trình trên vế theo vế ta có :

$$(x + 1)^2 (y + 1)^2 (z + 1)^2 = 100 \qquad (4)$$

Thay (1) vào (4) ta có : $4(z + 1)^2 = 100 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = 25$

$\Rightarrow z = 4; z = 6$

Tương tự ta có : $y = 0, y = -2$ và $x = 1, x = -3$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (1, 0, 4) và (−3, −2, 6).

328 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz + zx = 12 & (2) \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = 3 & (3) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Nhân 2 vế của (3) cho xyz ta có : $xy + yz + zx = \dfrac{3}{2}xyz \qquad (4)$

(4) − (2) ta được $xyz = 8 \qquad (5)$

Nhân 2 vế của (2) cho x ta có :

$x^2y + xyz + zx^2 = 12x \Leftrightarrow x^2(x + z) + xyz = 12x$

$\Leftrightarrow x^2(6 - x) + 8 = 12x$ (do (1), (5))

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

thế $x = 2$ vào (1) : $y + z = 4$

thế $x = 2$ vào (3) : $\dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = 2$

$\Rightarrow x = y = z = 2.$

329 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 4 & (1) \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Giải

- Ta có $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ vì $\begin{cases} y^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

- Khi $x \neq 0$. Đặt $y = kx$, thế vào hệ : (I) $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} x^2(k^2 - 3k) = 4 & (3) \\ x^2(k^2 - 4k + 1) = 1 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) chia (4), ta có :

$$\frac{k^2 - 3k}{k^2 - 4k + 1} = 4 \Leftrightarrow 3k^2 - 13k + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

* Với $k = 4$ thế vào (3) $\Leftrightarrow$ $4x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1$

khi $x = 1 \Rightarrow y = 4$

khi $x = -1 \Rightarrow y = -4$

* Với $k = \dfrac{1}{3}$ thế vào (3) $\Leftrightarrow$ $x^2\left(\dfrac{1}{9} - 1\right) = 4 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{9}{2}$ (VN)

Tóm lại hệ phương trình cho có 2 nghiệm (1, 4) ; (–1, –4).

330 Định m để hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - my^3 = \dfrac{1}{2}(m+1)^2 & (1) \\ x^3 + mx^2y + xy^2 = 1 & (2) \end{cases}$

có nghiệm và mọi nghiệm đều thỏa $x + y = 0$ (3)

Giải

Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm của hệ.

Từ (3) $\Rightarrow$ $x_o + y_o = 0 \Leftrightarrow y_o = -x_o$.

Thế vào (1) và (2) ta có : $\begin{cases} x_o^3(m+1) = \dfrac{1}{2}(m+1)^2 & (3) \\ x_o^3(2-m) = 1 & (4) \end{cases}$

Lấy (3) chia (4), ta có : $\dfrac{m+1}{2-m} = \dfrac{1}{2}(m+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Thử lại :

1) Với $m = 0$ thì $\begin{cases} x^3 = \dfrac{1}{8} \\ x^3 + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = +\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ (I) có nghiệm không thỏa $x + y = 0$. Nên $m = 0$ (loại).

2) $m = -1$: hệ cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$ thỏa $x + y = 0$. Vậy $m = -1$ (chọn).

3) $m = 1$: hệ cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ x^3 + x^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$

Đặt : $y = kx \Rightarrow \begin{cases} x^3(1 - k^3) = 2 \\ x^3(k^3 + k + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1 - k^3}{k^3 + k + 1} = 2$

$\Leftrightarrow \quad k = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -x \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$\Rightarrow$ $y = -1$ thỏa điều kiện $x + y = 0$.

Kết luận : giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$.

331 Định m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$(I) \begin{cases} x^2 + mxy + y^2 = m & (1) \\ x^2 + (m-1)xy + my^2 = m & (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) – (2), ta có : $xy + (1 - m)y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 0 \\ x = (m-1)y \end{bmatrix}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + mxy + y^2 = m \end{cases} \\ \begin{cases} x = (m-1)y \\ x^2 + mxy + y^2 = m \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = m \end{cases} & (5) \\ \begin{cases} x = (m-1)y \\ y^2 = \dfrac{m}{2m^2 - 3m + 2} \end{cases} & (6) \end{bmatrix}$$

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (5) \text{ có nghiệm} \\ (6) \text{ có nghiệm} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \geq 0 \\ m \geq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m \geq 0.$

332 Giải các bất phương trình : **1)** $2x^2 - 5x + 2 < 0$

2) $2x^2 + 8x + 11 < 0$ **3)** $7x^2 - 4x - 3 \geq 0$.

Giải

1) Ta có : $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 2$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$		+	0	−	0	+	

Nhờ bảng xét dấu ta có nghiệm bất phương trình :

$$2x^2 - 5x + 2 < 0 \quad \text{là} \quad \frac{1}{2} < x < 2.$$

2) Ta có : $2x^2 + 8x + 11 = 0$ (VN) vì $\Delta' = 16 - 22 = -6 < 0$

Do đó : $2x^2 + 8x + 11 > 0$ $\forall x$, nên bất phương trình $2x^2 + 8x + 11 < 0$ VN.

3) Ta có : $7x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; x = -\frac{3}{7}$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		1		$+\infty$
$7x^2 - 4x - 3$		+	0	−	0	+	

Nhờ bảng xét dấu ta có nghiệm bất phương trình :

$$7x^2 - 4x - 3 \geq 0 \quad \text{là} \quad x \leq -\frac{3}{7} \vee 1 \leq x$$

Hay $S = \left(-\infty, -\frac{3}{7}\right] \cup [1, +\infty)$.

333 Giải các bất phương trình : **1)** $1 - x^2 \leq 0$

2) $-5x^2 + 19x + 4 > 0$ **3)** $4x^2 - 12x + 9 > 0$.

Giải

1) Ta có : $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 ; x = 1$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		−	0	+	0	−	

Nhờ bảng xét dấu, ta có nghiệm của bất phương trình :

$$1 - x^2 \leq 0 \quad \text{là} \quad x \leq -1 \vee 1 \leq x$$

Hay $S = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2) Ta có : $-5x^2 + 19x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} ; \quad x = 4$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		4		$+\infty$
$-5x^2 + 19x + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nhờ bảng xét dấu ta có nghiệm của bất phương trình :

$$-5x^2 + 19x + 4 > 0 \quad \text{là} \quad -\frac{1}{5} < x < 4$$

Hay $S = \left(-\frac{1}{5}, 4\right)$.

3) Ta có : $4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$ (kép)

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2 - 12x + 9$		$+$	0	$+$	

Nhờ bảng xét dấu ta có nghiệm của bất phương trình :

$$4x^2 - 12x + 9 > 0 \text{ là } S = R \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

334 Giải bất phương trình : $\dfrac{x^2 + x + 3}{1 - 2x} < 0$.

Giải

Vì $x^2 + x + 3 = 0$ có $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x + 3 > 0 \ \forall x$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x^2 + x + 3$		$+$		$+$	
$-2x + 1$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2 + x + 3}{1 - 2x}$		$+$		$-$	

Nhờ bảng xét dấu ta có nghiệm của bất phương trình :

$$\frac{x^2 + x + 3}{1 - 2x} < 0 \text{ là } \frac{1}{2} < x.$$

335 Giải bất phương trình : $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} > 0$.

Giải

Ta có : $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; x = 2$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; x = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy bất phương trình có nghiệm là $1 \neq x < 2 \vee x > 3$.

336 Giải bất phương trình : $\dfrac{x-2}{1-x} + \dfrac{x-3}{x+1} \geq \dfrac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$. (1)

Giải

Sau khi chuyển vế, đổi mẫu chung, thu gọn ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 7x - 10}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 1} \leq 0$$

Có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		$+\infty$
$x^2 + 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Vậy bất phương trình (1) có nghiệm là $-5 \leq x \leq -2 \vee -1 < x < 1$.

337 Giải bất phương trình : $x(x + 1) < \dfrac{42}{x^2 + x + 1}$ (1)

Giải

Ta có : $x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x \in R$ (vì có $\Delta < 0$)

Vậy (1) $\Leftrightarrow x(x + 1)(x^2 + x + 1) < 42 \Leftrightarrow (x^2 + x)(x^2 + x + 1) < 42$

Đặt : $t = x^2 + x$

Thì $(1) \Leftrightarrow t(t+1) - 42 < 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 < 0 \Leftrightarrow -7 < t < 6$

$$\Leftrightarrow -7 < x^2 + x < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 7 > 0 & \text{đúng } \forall x \in R \text{ vì } \Delta < 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 & \Leftrightarrow -3 < x < 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $-3 < x < 2$.

338 Giải bất phương trình : $-4 \le \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \le 1$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow -4(x^2 + 1) \le x^2 - 2x - 7 \le x^2 + 1 \text{ vì } x^2 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 \ge 0 \\ x - 4 \ge 0 \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2 - 2x - 3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x - 4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
hệ bpt									

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $-4 \le x \le -\dfrac{3}{5} \vee 1 \le x$.

339 Giải và biện luận các bất phương trình :

1) $x^2 + (m-1)x + 1 > 0$ (1) **2)** $mx^2 - (m+1)x + 2 \ge 0$.

Giải

1) Ta có : $\Delta = (m-1)^2 - 4 \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 3$

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta xét các trường hợp :

a) $-1 < m < 3 \Leftrightarrow \Delta < 0$: thì VT (1) > 0 vì $a = 1 > 0 \ \forall x$

Nên (1) có nghiệm tùy ý.

b) $m < -1 \vee 3 < m \Leftrightarrow \Delta > 0$: pt $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ có 2 nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{(1-m) \pm \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2}$$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + (m-1)x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó nghiệm của bất phương trình (1) là $x < x_1 \vee x_2 < x$

Hay $S = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

c) $m = -1$. Bất phương trình cho trở thành :

$$x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Vậy $S = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

d) $m = 3$. Bất phương trình cho trở thành :

$$x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

Vậy $S = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2) Ta xét hai trường hợp.

a) $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow -x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ hay $S = (-\infty, 2]$.

b) $m \neq 0$ thì $\Delta = m^2 - 6m + 1$

m	$-\infty$		$3 - 2\sqrt{2}$		$3 + 2\sqrt{2}$		$+\infty$
$\Delta = m^2 - 6m + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $m < 0$ thì $\Delta > 0$ nên VT (2) = 0 có nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{(m+1) \pm \sqrt{m^2 - 6m + 1}}{2m}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$mx^2 - (m+1)x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x_1 \leq x \leq x_2$.

- $m > 0$ và thỏa $0 < m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$ thì $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$mx^2 - (m+1)x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy nghiệm của (2) là $x \leq x_1 \vee x_2 \leq x$

Hay $S = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ và thỏa $3 - 2\sqrt{2} < m < 3 + 2\sqrt{2}$ thì $m > 0$ và $\Delta < 0$

bất phương trình (2) có nghiệm tùy ý $S = R$.

- Khi $m = 3 \pm 2\sqrt{2}$ thì $\Delta = 0$. Bất phương trình có nghiệm tùy ý.

340 Giải và biện luận bất phương trình : $mx^2 + x + m < 0$ (1)

Giải

1) $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x = 0$

2) $m \neq 0$ thì vế trái có biệt thức $\Delta = 1 - 4m^2$

Ta xét các trường hợp sau :

a) $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < m \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$

Trường hợp này VT (1) < 0, $\forall x$. Nên bất phương trình (1) có VSN (S = R).

b) $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$

Trường hợp này tam thức bậc 2 có 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4m^2}}{2m}$ $(x_1 < x_2)$

Ta lập bảng xét dấu :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$mx^2 + x + m$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy nghiệm của (1) là : $x < \dfrac{-1+\sqrt{1-4m^2}}{2m} \vee x > \dfrac{-1-\sqrt{1-4m^2}}{2m}$

$$S = \left(-\infty, \frac{-1+\sqrt{1-4m^2}}{2m}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{1-4m^2}}{2m}, +\infty\right).$$

c) $m = 0$, bpt (1) trở thành $x < 0$.

Vậy $x < 0$ là nghiệm của bất phương trình nên $S = (-\infty, 0)$.

d) $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

VT (1) ≥ 0. Vậy (1) vô nghiệm.

e) $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$

Trong trường hợp này VT (1) = 0 có 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4m^2}}{2m}$

Ta lập bảng xét dấu :

x		x_1		x_2	
$mx^2 + x + m$	+	0	−	0	+

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) :

$$\frac{-1-\sqrt{1-4m^2}}{2m} < x < \frac{-1+\sqrt{1-4m^2}}{2m}$$

Hay $S = \left(\frac{-1-\sqrt{1-4m^2}}{2m}; \frac{-1+\sqrt{1-4m^2}}{2m}\right)$.

341 Cho bất phương trình : $x^2 + 2(m + 2)x - (m + 2) \geq 0$

1) Xác định m để bất phương trình vô nghiệm.

2) Xác định m để bất phương trình được thỏa với mọi $x \leq 0$.

Giải

1) Ta có : $\Delta' = (m + 2)^2 + m + 2 = (m + 2)(m + 3)$

m	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
Δ'		+	0	−	0	+	

Ta thấy :

- $-3 \leq m \leq -2$ thì $\Delta' \leq 0$. Bất phương trình có nghiệm tùy ý
- $m < -3 \vee -2 < m$: thì $\Delta' > 0$. Tam thức bậc 2 ở vế trái có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$) thì

m		x_1		x_2	
VT	+	0	−	0	+

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < x_1 \vee x_2 < x$

Ta thấy trong cả 2 trường hợp, bất phương trình (1) luôn có nghiệm.

Do đó không có giá trị nào của m để bất phương trình vô nghiệm.

2)• Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $-3 \leq m \leq -2$

Bất phương trình thỏa $\forall x \in R \Rightarrow$ bpt thỏa với mọi $x \leq 0$

- Nếu $\Delta' > 0$ thì VT có 2 nghiệm x_1, x_2

Nhờ bảng xét dấu ở câu 1, ta có :

Bất phương trình thỏa $\forall x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \leq x_1 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} S = -2(m+2) > 0 \\ P = -(m+2) \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m < -2 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

Tóm lại nếu $m \leq -2$ thì bất phương trình thỏa $\forall x \leq 0$.

42 Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 18 > 0 \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x^2 - 24x - 77 > 0 \\ -2x^2 + 5x + 3 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 14x + 1 > 0 \\ x^2 - 18x + 1 < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x^2 - 8x)^2 < (x+10)^2 \\ (x^2 - 16x + 21)^2 > 36x^2 \end{cases}$

Giải

a) Ta có $2x^2 - 13x + 18 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 ; \quad x_2 = \frac{9}{2}$

$3x^2 - 20x - 7 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3} ; \quad x_4 = 7$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$\frac{9}{2}$	7	$+\infty$
$2x^2 - 13x + 18$	+	+	0 −	0	+	+
$3x^2 - 20x - y$	+	0	−	−	0	+
Hệ						

Nhờ bảng xét dấu ta có nghiệm của hệ là : $S = \left(-\frac{1}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{9}{2}, 7\right)$

b) Ta có $5x^2 - 24x - 77 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 ; \quad x_2 = \frac{39}{5}$

$-2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} ; \quad x_4 = 3$

x	-3	$-\frac{1}{2}$	3	$\frac{39}{5}$	
$5x^2 - 24x - 77$	+ 0	−	−	0	+
$-2x^2 + 5x + 3$	−	0 +	0	−	−
Hệ					

Nhờ bảng xét dấu ta thấy hệ bất phương trình vô nghiệm.

c) Ta có $x^2 - 14x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 - 4\sqrt{3} \quad x_2 = 7 + 4\sqrt{3}$

$x^2 - 18x + 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 9 - 4\sqrt{5} \quad x_4 = 9 + 4\sqrt{5}$

x		$9-4\sqrt{5}$		$7-4\sqrt{3}$		$7+4\sqrt{3}$		$9+4\sqrt{5}$	
$x^2-14x+1$	+		+	0	−	0	+		+
$x^2-18x+1$	+	0	−		−		−	0	+
Hệ				−		+		−	

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là :

$$S = \left(9-4\sqrt{5}, 7-4\sqrt{3}\right) \cup \left(7+4\sqrt{3}, 9+4\sqrt{5}\right).$$

d) $(x^2-8x)^2 < (x+10)^2 \Leftrightarrow (x^2-7x+10)(x^2-9x-10) < 0$

$(x^2-16x+21)^2 > 36x^2 \Leftrightarrow (x^2-22x+21)(x^2-10x+21) > 0$

x		-1		1		2		3		5		7		10		21	
$x^2-7x+10$	+		+		+	0	−		−	0	+		+		+		+
$x^2-9x-10$	+	0	−		−		−		−		−		−	0	+		+
$x^2-22x+21$	+		+	0	−		−		−		−		−		−	0	+
$x^2-10x+21$	+		+		+		+	0	−		−	0	+		+		+
Hệ																	

Vậy ta có nghiệm của hệ là $S = (-1, 1) \cup (5, 7)$.

343 Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau đây có 1 nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x^2+2x+(m+1) \le 0 & (1) \\ x^2-4x-6(m+1) < 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Tam thức ở VT (1) có $\Delta'_1 = 1 - m - 1 = m$

Tam thức ở VT (2) có $\Delta'_2 = 2(3m+5)$

Ta xét các trường hợp :

1) $m = 0$ thì hệ cho trở thành : $\begin{cases} x^2+2x+1 \le 0 \\ x^2-4x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2-4x-6 < 0 \end{cases}$

Nghiệm của hệ bất phương trình là $x = -1$. Vậy $m = 0$ nhận được.

2) $m = -\dfrac{5}{3}$ thì hệ cho trở thành :

$$\begin{cases} 3x^2+6x-2 \le 0 & (1a) \\ x^2-4x+4 < 0 & (2\varepsilon) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x-2 \le 0 & (1a) \\ (x-2)^2 < 0 & (2a) \end{cases}$$

Vì (2a) vô nghiệm, nên hệ bpt vô nghiệm. Vậy $m = -\frac{5}{3}$ (loại).

3) $-\frac{5}{3} < m < 0$

VT (1) = 0 có 2 nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{m}$

$\Rightarrow$ bất phương trình (1) có nghiệm $x_1 \le x \le x_2$

VT (2) = 0 có 2 nghiệm $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2(3m+5)}$

Do đó bất phương trình (2) có nghiệm x sao cho $x_3 < x < x_4$

Vì phần giao $[x_1, x_2] \cap (x_3, x_4)$ chứa nhiều phần tử x hoặc $= \varnothing$.

Do đó hệ bất phương trình hoặc là vô nghiệm hoặc là có nhiều nghiệm, nên hệ không có nghiệm duy nhất.

Do đó $-\frac{5}{3} < m < 0$ bị loại.

- Ta không xét $m > 0$ vì bất phương trình (1) vô nghiệm

$m < -\frac{5}{3}$ vì bất phương trình (2) vô nghiệm

Tóm lại để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất ta chọn $m = 0$.

344 Giải và biện luận hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - (m+1)x + 2(m-1) \le 0 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 3(m-1) \ge 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Tam thức ở vế trái (1) có 2 nghiệm $x_1 = m - 1$, $x_2 = 2$

Tam thức ở vế trái (2) có 2 nghiệm $x_3 = m - 1$ và $x_4 = 3$.

Ta xét 2 trường hợp (phải so sánh $m - 1$, 2, 3 để lập bảng xét dấu)

* Khi $m - 1 < 2 \Rightarrow m < 3$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$m-1$		2		3	
VT (1)	+	0	−	0	+		+	
VT (2)		0	−		−	0	+	
Hệ								

Nhờ bảng xét dấu ta thấy hệ bất phương trình chỉ có 1 nghiệm $x = m - 1$.

* Khi $m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$. Hệ bất phương trình trở thành :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \le 0 \\ x^2 - 5x + 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \le 0 \\ (x-2)(x-3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

* Khi $2 < m - 1 < 3 \Leftrightarrow 3 < m < 4$

x	$-\infty$	2		$m-1$		3	$+\infty$
VT (1)	+	0	−	0	+		+
VT(2)	+		+	0	−	0	+
Hệ							

Vậy nghiệm của hệ là $S = [2, m - 1]$.

* Khi $m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$, hệ bất phương trình trở thành :

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \le 0 \\ x^2 - 6x + 9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \le 0 \\ (x-3)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow S = [2, 3]$$

* Khi $3 < m - 1 \Leftrightarrow 4 < m$

x		2		3		$m-1$	
VT (1)	+	0	−		−	0	+
VT(2)	+		+	0	−	0	+
Hệ							

Nghiệm của hệ $S = [2, 3] \cup \{m - 1\}$.

345 Tìm các giá trị của m để ta có : $1 \le \dfrac{3x^2 - mx + 5}{3x^2 - x + 1} \le 6 \quad \forall x \in R \qquad (1)$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2 - mx + 5}{3x^2 - x + 1} - 1 \ge 0 \\ \dfrac{3x^2 - mx + 5}{3x^2 - x + 1} - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(1-m)x + 4}{3x^2 - x + 1} \ge 0 \\ \dfrac{15x^2 + (m-6)x + 1}{3x^2 - x + 1} \ge 0 \end{cases}$$

Vì $3x^2 - x + 1 > 0$ (do $\Delta < 0$). Nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)x + 4 \ge 0 \\ 15x^2 + (m-6)x + 1 \ge 0 \end{cases} \text{ đúng với mọi } x \in R$$

- Ta thấy $(1 - m)x + 4 \ge 0 \ \forall x \in R$ khi $m = 1$

  lúc đó $15x^2 + (m - 6)x + 1 \ge 0$ trở thành $15x^2 - 5x + 1 \ge 0$

  luôn đúng $\forall x \in R$ vì có $\Delta = 25 - 60 = -35 < 0$.

• Tóm lại : nếu m = 1 thì ta có: $1 \le \dfrac{3x^2 - mx + 5}{3x^2 - x + 1} \le 6 \quad \forall x \in R.$

346 Giải và biện luận hệ bất phương trình : $\begin{cases} x^2 + 4x + m - 1 < 0 & (1) \\ 2x^2 - x + 2m - 3 > 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Tam thức VT (1) có $\Delta'_1 = -m + 5$; $\Delta'_1 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Tam thức VT (2) có $\Delta'_2 = -16m + 25$; $\Delta'_2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{25}{16}$

Ta xét các trường hợp :

1) $m < \dfrac{25}{16} \Rightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \end{cases}$

Tam thức VT (1) có 2 nghiệm : $x_1 = -2 - \sqrt{-m + 15}$; $x_2 = -2 + \sqrt{-m + 15}$

Tam thức VT (2) có 2 nghiệm :

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-16m + 25}}{4} \; ; \; x_4 = \frac{1 + \sqrt{-16m + 25}}{4}$$

Nghiệm bất phương trình (1) là : $x_1 < x < x_2$

Nghiệm bất phương trình (2) là : $x < x_3 \vee x_4 < x$

Vậy nghiệm của hệ là : $S = [(-\infty, x_3) \cap (x_1, x_2)] \cup [(x_1, x_2) \cap (x_4, +\infty)]$.

2) $m = \dfrac{25}{16}$. Bất phương trình (1) trở thành : $x^2 + 4x + \dfrac{9}{16} < 0$

$$\Leftrightarrow \quad 16x^2 + 64x + 9 < 0$$

Nên nghiệm bất phương trình (1) là : $\dfrac{-8 - \sqrt{55}}{4} < x < \dfrac{-8 + \sqrt{55}}{4}$

Bpt (2) $\Leftrightarrow 16x^2 - 8x + 1 > 0$ có nghiệm là $x \neq \dfrac{1}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ là : $\dfrac{-8 - \sqrt{55}}{4} < x < \dfrac{-8 + \sqrt{55}}{4}$.

3) $\dfrac{25}{16} < m < 5 \Rightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 < 0 \end{cases}$

Do đó bất phương trình (1) có nghiệm là $x_1 < x_2$

bất phương trình (2) có nghiệm S = R.

Do đó nghiệm của hệ bất phương trình là $S = (x_1, x_2)$.

4) $m = 5$, bpt (1) $\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 < 0$ VN

Nên hệ bất phương trình cho VN.

5) $m > 5$: bpt (1) VN nên hệ bpt cho VN.

Chương 8

CÁC PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

1. PHƯƠNG TRÌNH CÓ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

347 Giải các phương trình :

1) $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$ (1) 2) $|x| + x + 1 = |3 - 2x|$ (2)

3) $|3x + 4| = |x - 2|$ 4) $|3x^2 - 2| = |6 - x^2|$.

Giải

1) Giải phương trình : $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$ (1)

* Nếu $x \geq 1$ thì (1) $\Rightarrow$ $x^2 - 5x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 1 \vee x_2 = 4$

* Nếu $x < 1$ thì (1) $\Rightarrow$ $x^2 + 5x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 1, x = -6$ ($x = 1$ loại)

Tóm lại phương trình (1) có 3 nghiệm : $x = 1, x = 4, x = -6$.

2) Giải phương trình : $|x| + x + 1 = |3 - 2x|$ (2)

* Nếu $x < 0$ thì (2) $\Rightarrow$ $-x + x + 1 = 3 - 2x$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ (loại)

* Nếu $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ thì (2) $\Rightarrow$ $x + x + 1 = 3 - 2x$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{2}$ (nhận)

* Nếu $\frac{3}{2} \leq x$ thì (2) $\Rightarrow$ $x + x + 1 = 2x - 3$ (VN)

Tóm lại phương trình (2) có 1 nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

3) Giải phương trình : $|3x + 4| = |x - 2|$ (3)

x		$-\frac{4}{3}$		2	
$3x + 4$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$

* Nếu $x \leq \frac{4}{3}$ thì (3) $\Rightarrow$ $-3x - 4 = -x + 2$ $\Leftrightarrow$ $x = -3$ (nhận)

* Nếu $-\frac{4}{3} < x < 2$ thì (3) $\Rightarrow$ $3x + 4 = -x + 2$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2}$ (nhận)

* Nếu $2 \leq x$ thì (3) $\Leftrightarrow$ $3x + 4 = x - 2$ $\Leftrightarrow$ $x = -3$ (loại)

Tóm lại phương trình (3) chỉ có 2 nghiệm $x = -\frac{1}{2}$; $x = -3$.

4) Giải phương trình : $|3x^2 - 2| = |6 - x^2|$ (4)

Bình phương 2 vế ta có : $9x^4 - 12x^2 + 4 = 36 - 12x^2 + x^4$

$\Leftrightarrow \quad 8x^4 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$.

48 Giải các phương trình : **1)** $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$ (1)

2) $x^2 - 2x + 8 = |x^2 - 1|$ (2)

Giải

1) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = x + 4 \end{cases} \quad (A) \\ \begin{cases} + x^2 - 5x + 4 < 0 \\ - x^2 + 5x - 4 = x + 4 \end{cases} \quad (B) \end{array}\right.$

$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee 4 \leq x \\ x = 0 \vee x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 ; x = 6$

$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ - x^2 + 4x - 8 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow$ (B) vô nghiệm

Tóm lại (1) có 2 nghiệm là $x = 0$; $x = 6$.

2) $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 2x + 8 = -x^2 + 1 \end{cases} \quad (A) \\ \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 8 = x^2 - 1 \end{cases} \quad (B) \end{array}\right.$

$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x^2 - 2x + 7 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow$ (A) vô nghiệm

$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee 1 < x \\ x = +\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

Tóm lại (2) có 1 nghiệm là $x = \frac{9}{2}$.

49 Giải các phương trình : **1)** $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$ (1)

2) $|1 - x| = 1 + x + x^2$ (2)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1,\ x = 4 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x < 1 \\ x = 1,\ x = -6 \end{cases} \right.$$

Do đó phương trình (1) có 3 nghiệm là $x = 1,\ x = 4,\ x = -6$.

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \leq 1 \\ 1 + x + x^3 = 1 - x \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x > 1 \\ 1 + x + x^3 = x - 1 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^3 + 2x = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x > 1 \\ x^3 + 2 = 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 0 \\ \text{VN} \end{cases} \right.$$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 1 nghiệm $x = 0$.

350 Giải các phương trình : 1) $|2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0$ (1

2) $|x^2 - 1| = 1 - |x|$ (2

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 3x^2 = 6 - x^2 \\ 2 - 3x^2 = x^2 - 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{VN} \\ -\sqrt{2} = x,\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm $x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow |x + 1|.|x - 1| = 1 - |x| \Leftrightarrow (1 + |x|)\,||x| - 1| = 1 - |x|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 1 \\ 1 + |x| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1,\ x = 1,\ x = 0.$$

351 Giải các phương trình :

1) $\dfrac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x$ (1) 2) $\dfrac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = 2$ (2

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 1 = x(x - 2) \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x < 2 \\ x^2 - 1 = x(2 - x) \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \right. (\text{VN}) \left. \begin{cases} x < 2 \\ 2x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} ; \quad x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -1\\ x^2 - x - 2 = 2(-x)(x-2)\end{cases}\\ \begin{cases}-1 < x < 0\\ x^2 + x = 2(-x)(x-2)\end{cases}\\ \begin{cases}x \in (0,2) \cup (2,+\infty)\\ x^2 + x = 2x(x-2)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x \le -1\\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{1}{3}\ (\text{loại})\end{cases} & \text{Hệ VN}\\ \begin{cases}-1 < x < 0\\ 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1\ (\text{loại})\end{cases} & \text{Hệ VN}\\ \begin{cases}x \in (0,2) \cup (2,+\infty)\\ x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 5\end{cases} & \Leftrightarrow x = 5\end{array}\right.$$

Tóm lại phương trình (2) chỉ có 1 nghiệm là $x = 5$.

352 Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$mx^2 - 2(m-1)x + 2 = |mx - 2| \qquad (A)$$

Giải

* Khi $m = 0$ thì (A) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

* Khi $m \neq 0$ Đặt $t = mx - 2$, thì ta có :

$$(A) \Leftrightarrow (t+2)(t+4) = m(2 + 2t + |t|)$$

$$(A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}t \le 0\\ (t+2)(t+4) = m(t+2)\end{cases} & (B)\\ \begin{cases}t > 0\\ t^2 + 6t + 8 = m(3t+2)\end{cases} & (C)\end{array}\right.$$

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases}t \le 0\\ t = -2 \vee t = m - 4\end{cases}$$

$$(C) \Leftrightarrow \begin{cases}t \ge 0\\ t^2 + 3(2-m)t + 8 - 2m = 0 \quad (f(t))\end{cases}$$

Để (A) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a - 4 = -2\\ a - 4 > 0\end{array}\right.\\ f(t) \neq 0, \forall t \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a = 2\\ a > 4\end{array}\right.\\ f(t) \neq 0, \forall t \ge 0\end{cases}$$

- Nếu $m > 4$ thì $f(0) = 2(4 - m) < 0$

  $\Rightarrow$ $f(t)$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 < 0 < t_2$

  $\Rightarrow$ trái với điều kiện $f(t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0$

- Nếu $m = 2$ thì (A) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Tóm lại để (A) có nghiệm duy nhất ($x = 0$) ta chọn $a = 0$, $a = 2$.

353 Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$|2x^2 - 3x - 2| = 5m - 8x - 2x^2 \qquad (A)$$

Giải

$$(A) \Leftrightarrow 5m = |2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x$$

$$(A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5m = 4x^2 + 5x - 2 = f(x) \\ x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} 5m = 11x + 2 \\ x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 2\right] \end{cases} \end{array}\right.$$

Ta dùng phương pháp đồ thị :

Vẽ Parabol $y = 4x^2 + 5x - 2$ với $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$

và đường thẳng $y = 11x + 2$ với $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 2\right]$

(A) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ $5m = f\left(-\dfrac{5}{8}\right)$

(đường thẳng $y = 5m$ tiếp xúc với Parabol tại đỉnh S)

$$\Leftrightarrow 5m = -\frac{57}{16} \Leftrightarrow m = -\frac{57}{80}.$$

354 Biện luận theo m, số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 + x}{|x|} = m \qquad (A)$

Giải

$$(A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x = mx \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x = -mx \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x[x + 1 - m] = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x[x + 1 + m] = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 1 \\ m > 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 0 \\ m = -x - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -x - 1 \\ m > -1 \end{cases}$$

Biện luận :

- Nếu $m \le -1$; (A) vô nghiệm.
- Nếu $m \in (-1, 1]$, (A) có nghiệm duy nhất $x = -m - 1$.
- Nếu $m > 1$, (A) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m - 1$, $x_2 = -m - 1$.

355 Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm $x + |x^2 - 2x + m| = 0$ (A)

Giải

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 2x + m = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - x + m = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2x + m = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$$

Biện luận :

* Khi $m > 0$ thì (A) vô nghiệm

* Khi $m = 0$ thì (A) có 1 nghiệm $x = 0$

* Khi $m < 0$ thì (A) có 2 nghiệm là $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$.

356 Tìm k để phương trình sau đây có 4 nghiệm phân biệt

$$(x - 1)^2 = 2|x - k| \qquad (A)$$

Giải

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 2x - 2k \\ (x - 1)^2 = 2k - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2k + 1 = 0 & (1) \text{ với } f(x) = x^2 - 4x + 2k + 1 \\ x^2 = 2k - 1 & (2) \end{cases}$$

- Điều kiện để $x^2 - 4x + 2k + 1 = 0$ và $x^2 = 2k - 1$ có nghiệm chung là hệ sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2k + 1 = 0 \\ x^2 = 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ x^2 = 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ k = 1 \end{cases}$$

• Mặt khác để (A) có 4 nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} \text{(1) có 2 nghiệm phân biệt} & \Leftrightarrow & \Delta'_f = 4 - 2k - 1 > 0 \\ \text{(2) có 2 nghiệm phân biệt} & \Leftrightarrow & x^2 = 2k - 1 > 0 \\ \text{và (1), (2) không có nghiệm chung} \end{cases}$$

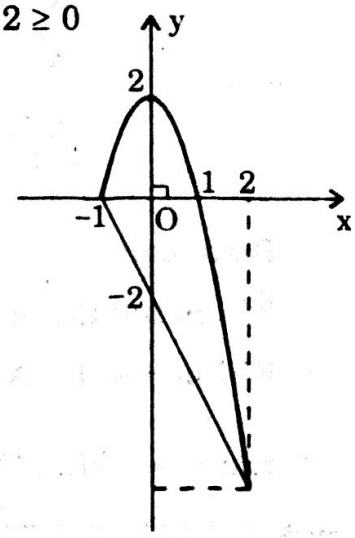
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 - 2k > 0 \\ 2k - 1 > 0 \\ k \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

357 Giải và biện luận phương trình : $|x^2 + x + m| = -x^2 + x + 2$ (A)

Giải

Ta có (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + m = -x^2 + x + 2 \vee x^2 + x + m = x^2 - x - 2 \\ \text{với } x \in [-1, 2] \text{ để VP} = -x^2 + x + 2 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x^2 + 2 \vee m = -2x - 2 \\ \text{với } x \in [-1, 2] \end{cases}$$



• Khi $m > 2$, phương trình (A) vô nghiệm

• Khi $m = 2$, phương trình (A) $\Leftrightarrow \quad x = 0$

• Khi $m \in [0, 2)$, phương trình (A) $\Leftrightarrow \quad m = 2 - 2x^2$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{2+m}{2}, \sqrt{\frac{2-m}{2}}\right\}$$

• Khi $m \in (-6, 0)$ phương trình (A) $\Leftrightarrow \quad x \in \left\{\sqrt{-\frac{2+m}{2}}, \sqrt{\frac{2-m}{2}}\right\}$

• Khi $m = -6$, phương trình (A) $\Leftrightarrow \quad x = 2$

• Khi $m < -6$, phương trình (A) vô nghiệm.

358 Giải các bất phương trình : 1) $2x^2 - |5x - 3| < 0$

2) $|x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$ 3) $x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$.

Giải

1) Giải bất phương trình $2x^2 - |5x - 3| < 0$ (1)

* Nếu $x \geq \frac{3}{5}$ thì $5x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |5x - 3| = 5x - 3$

(1) $\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < \frac{3}{2}$ thỏa đk $x \geq \frac{3}{5}$

* Nếu $x < \frac{3}{5}$ thì $5x - 3 < 0 \Rightarrow |5x - 3| = -5x + 3$

(1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$ thỏa đk $x < \frac{3}{5}$

Vậy (1) có tập nghiệm là $S = \left(-3, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

2) Giải bất phương trình : $|x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$ (2)

(2) $\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)^2 > (x^2 - 4x - 5)^2$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)^2 - (x^2 - 4x - 5)^2 > 0$

$\Leftrightarrow 16(x - 1)(x + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bất phương trình có nghiệm là $x > 1$.

3) Giải bất phương trình : $x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$ (3)

* Nếu $x \le -4 \vee x \ge 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \ge 0$

(3) $\Leftrightarrow x - 8 > x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 < 0$

Bất phương trình này vô nghiệm

* Nếu $-4 < x < 1$ thì $x^2 + 3x - 4 < 0$, bất phương trình VN vì $x - 8 > 0$

(3) $\Leftrightarrow x - 8 > -x^2 - 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 > 0$

$\Rightarrow x < -6 \vee 2 < x$ không thỏa điều kiện $-4 < x < 1$: vô nghiệm

Tóm lại bất phương trình (3) vô nghiệm.

359 Giải bất phương trình : $3x^2 - |5x + 2| > 0$ (1)

Giải

* Nếu $5x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{5}$

(1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \vee 2 < x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{2}{5} \le x < -\frac{1}{3} \\ x > 2 \end{array}\right.$

* Nếu $5x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{5}$

(1) $\Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{2}{3} < x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ -\frac{2}{3} < x < -\frac{2}{5} \end{array}\right.$

Tóm lại bất phương trình (1) có tập nghiệm là :

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty).$$

2. PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

*** *Phương pháp giải :***

– *Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.*

– *Khử căn.*

– *Giải phương trình bậc 2, chọn nghiệm thích hợp với điều kiện ban đầu.*

360 Giải các phương trình :

1) $\sqrt{2x-3} = x-3$ (1) **2)** $\sqrt{5x+10} = 8-x$ (2)

3) $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2-6x+6}$ (3) **4)** $x - \sqrt{2x-5} = 4$ (4)

Giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ 5x+10 = (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 - 21x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

(3) Đặt $t = \sqrt{x^2-6x+6}$, $t \geq 0$, thì ta có

$$(3) \Leftrightarrow t^2 + 3 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

* Với $t = 1$ ta có : $x^2 - 6x + 6 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$

* Với $t = 3$ ta có : $x^2 - 6x + 6 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{3}$

Tóm lại phương trình (3) có 4 nghiệm là : $x \in \{1, 5, 3+2\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3}\}$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 2x-5 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 10x + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

361 Giải phương trình : $\sqrt{2x+8} = 3x+4$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 2x+8 = (3x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{4}{3} \\ x = -2 \vee x = -\dfrac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{9}.$$

362 Giải các phương trình : 1) $x - \sqrt{2x+7} = 4$ (1)

2) $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$ (2)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{7}{2} \\ x - 4 = \sqrt{2x+7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{7}{2} \\ x^2 - 8x + 16 = 2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x = 9$ và $x = 1$ (loại).

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ 2x + 1 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 4\sqrt{x-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 = 16(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 16x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4, x = 12$$

(2) $\Leftrightarrow$ $x = 4, x = 12$.

363 Giải các phương trình : 1) $x + \sqrt{x-1} = 13$ (1)

2) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$ (2)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 13 \\ \sqrt{x-1} = 13 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 13 \\ x - 1 = 169 - 26x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 13 \\ x^2 - 27x + 170 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 10,\ x_2 = 17 \Leftrightarrow x = 10$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{4}{3} \wedge x \geq 3 \\ \sqrt{3x+4} = 3 + \sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x + 4 = 9 + 6\sqrt{x-3} + x - 3 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-1)^2 = 9(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 11x + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 4, x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 ; x = 7.$$

364 Giải các phương trình : 1) $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$ (1)

2) $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}$ (2)

Giải

(1) $\Leftrightarrow$ $2(x^2+1) - 2x\sqrt{x^2+1} = 5$ $\Leftrightarrow$ $2x^2 + 2 - 5 = 2x\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $(2x^2-3)^2 = (2x\sqrt{x^2+1})^2$ $\Leftrightarrow$ $x^2 = \dfrac{9}{16}$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm\dfrac{3}{4}$

Thử lại : ta chỉ nhận nghiệm $x = -\dfrac{3}{4}$.

(2) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow$ $5x - 1 + 2x - 3 + 2\sqrt{(5x-1)(2x-3)} = 3x - 2$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{(5x-1)(2x-3)} = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ (5x-1)(2x-3) = 1 - 4x + 4x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $6x^2 - 13x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{1}{6}$; $x = 2$

Thử lại : ta chọn $x = 2$.

365 Giải các phương trình : 1) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

2) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Giải

1) Đặt $t = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{t^2 - 7}{-6} = 2x - x^2$

(1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{t^2-7}{-6} + t = 0$ $\Leftrightarrow$ $t^2 - 6t - 7 = 0$ $\Leftrightarrow$ $t_1 = -1$; $t_2 = 7$

* $-1 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$ VN

* $7 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 1 - 2\sqrt{2}$; $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

2) Ta có $x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho 4 số : 1, 1, $\sqrt{x-2}$, $\sqrt{4-x}$:

$1.\sqrt{x-2} + 1.\sqrt{4-x} \leq \sqrt{(1^2+1)(x-2+4-x)} \leq \sqrt{2.2} = 2$

Do đó (2) $\Leftrightarrow$ VT = VP = 2 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 11 = 2$ $\Leftrightarrow$ $x = 3$.

366 Giải phương trình $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x+5+x+6+3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=2x+11$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+5=0 \\ x+6=0 \\ \sqrt[3]{x+5}=-\sqrt[3]{x+6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-5 \\ x=-6 \\ x=-\dfrac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

367 Giải các bất phương trình :

1) $\sqrt{x^2+x-12}<8-x$ (1)

2) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$ (2)

3) $\sqrt{(x-3)(8-x)}+26>-x^2+11x$ (3)

Giải

1) Ta có $\sqrt{x^2+x-12}<8-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12\geq 0 \\ 8-x>0 \\ x^2+x-12<(8-x)^2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x\leq -4 \\ x\geq 3 \end{bmatrix} \\ x<8 \\ x<\dfrac{76}{17} \end{cases} \Leftrightarrow x\leq -4 \vee 3\leq x<\frac{76}{17}.$$

2) $$(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x-2<0 \\ x^2-3x-10\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x^2-3x-10>(x-2)^2 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x<2 \\ \begin{bmatrix} x\leq -2 \\ x\geq 5 \end{bmatrix} \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 2 \\ x>14 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x\leq -2 \\ x>14 \end{bmatrix}$$

Vậy (2) có tập nghiệm là $(-\infty, -2]\cup[14, +\infty)$.

3) Đặt : $t=\sqrt{(x-3)(8-x)}$ với điều kiện $t\geq 0$

$$(3) \Leftrightarrow t>t^2-2 \Leftrightarrow t^2-t-2<0 \Leftrightarrow -1<t<2$$

So với điều kiện $t\geq 0$

Ta có $0\leq t<2$ nên: $0\leq\sqrt{(x-3)(8-x)}<2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+11x-24\geq 0 \\ -x^2+11x-24<4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} -11x + 24 \le 0 \\ x + 28 \ge 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 8 \\ \left[\begin{matrix} x < 4 \\ x > 7 \end{matrix}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 3 \le x < 4 \\ 7 < x \le 8. \end{matrix}\right.$$

368 Giải bất phương trình : $\sqrt{2x^2 + 7x + 5} > x + 1$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ (2x^2 + 7x + 5) > (x + 1)^2 \end{cases} \begin{cases} x + 1 < 0 \\ 2x^2 + 7x + 5 \ge 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \ge -1 \\ x < -4 \vee -1 < x \end{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x \le -\frac{5}{2} \vee -1 \le x \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -1 < x \\ x \le -\frac{5}{2} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup (-1, +\infty).$$

369 Giải phương trình : $x^4 + x^2 - 30 = 0$ (1)

Giải

Đặt : $t = x^2 \ge 0$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t_1 = -6 \text{ (loại)} \\ t_2 = 5 \end{matrix}\right.$$

Vậy $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

370 Giải các phương trình :

1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ **2)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

3) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ **4)** $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$.

Giải

1) Đặt : $t = x^2 \ge 0$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t_1 = -1 \text{ (loại)} \\ t_2 = 4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

2) Đặt : $t = x^2 \ge 0$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{matrix}\right.$$

(2) có 4 nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

3) Đặt : $t = x^2 \geq 0$

$$(3) \Leftrightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \text{ (loại)} \\ t_2 = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình (3) vô nghiệm.

4) Đặt : $t = x^2 \geq 0$

$$(4) \Leftrightarrow 3t^2 + 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \text{ (loại)} \\ t_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(4) có 2 nghiệm là $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

371 Giải các phương trình :

1) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$ (1) **2)** $|x^2 - 8x + 7| = 2x - 9$ (2)

3) $|3x + 4| = |x - 2|$ (3) **4)** $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$ (4)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = x^2 + 6x + 5 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 + 5x - 4 = x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee 4 \leq x \\ x = -\dfrac{1}{11} \end{cases} \begin{cases} 1 < x < 4 \\ 2x^2 + x + 9 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Tóm lại phương trình (1) có 1 nghiệm $x = -\dfrac{1}{11}$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0 \\ x^2 - 8x + 7 = 2x - 9 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ -x^2 + 8x - 7 = 2x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee 7 \leq x \\ x = 2, x = 8 \end{cases} \begin{cases} 1 < x < 7 \\ x = 3 \pm \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 3 + \sqrt{11} \end{cases}$$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm $x = 3 + \sqrt{11}$; $x = 8$

$$(3) \Leftrightarrow (3x + 4)^2 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow (3x + 4)^2 - (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 2)(2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} ; x = -3.$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1, x = 4 \end{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x = 1, x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, x = 4 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình (4) có 3 nghiệm $x = -6$, $x = 1$, $x = 4$.

Chương 9

SƠ ĐỒ HORNER, PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3, PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4

Chia đa thức $P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *cho* $(x - \alpha)_1$ *ta có :*

$$P(x) = (x - \alpha)(b_o x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

Trong đó b_i $(i = 0,1.2,\ldots, n)$ *định bôi sơ đồ Horner*

	a_o	a_1	a_2	a_3	...	
α	b_o	$b_1 = \alpha b_o + a_1$	$b_2 = \alpha b_1 + a_2$	$b_3 = \alpha b_2 + a_3$		$b_i + \alpha b_{i-1} + a_i$

ÁP DỤNG

Ví dụ 1: *Tính thương và dư số trong phép chia của*

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 \quad \text{cho } x + 2$$

Ta có sơ đồ Horner

	2	1	–8	–1	6
–2	2	–3	–2	3	0

Vậy $P(x) = (x+2)(2x^3 - 3x^2 - 2x + 3) + 0$

Ví dụ 2 : *Tính thương và dư số trong phép chia của*

$$P(x) = 5x^4 - 2x^3 + 6x - 1 \quad \text{cho } x - 3$$

Ta có sơ đồ Horner

	5	–2	0	6	–1
3	5	13	39	123	368

Vậy $P(x) = (x - 3)(5x^3 + 13x^2 + 39x + 123) + 368.$

Ví dụ 3 : *Tìm giá trị của* $P(x) = x^9 - 2x^7 + 3x^6 - 2x^3 + x - 1$ *tại* $x = 2.$

Giải

Ta có P (2) là giá trị của dư số trong phép chia P(x) cho $x - 2$

Ta có sơ đồ Horner

	1	0	–2	3	0	0	–2	0	+1	–1
2	1	2	2	7	14	28	108	216	433	685

Ta có : $P(x) = (x - 2)(x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 7x^5 + 14x^4 + 28x^3 + 108x^2 + 216x + 443) + 865$

Khi $x = 2$ *thì* $P(x) = 865$.

I. Phương trình bậc 3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad (A)$$

* *Phương pháp chung là đặt vế trái thành tích*

* *Nếu* $a + b + c + d = 0$, *phương trình (A) có 1 nghiệm* $x = 1$

* *Nếu* $a - b + c - d = 0$, *phương trình (A) có 1 nghiệm* $x = -1$

* *Nếu phương trình (A) có chứa các căn* $\sqrt{2}$, ... , *ta thay x bởi các giá trị để có thể làm mất* $\sqrt{m}$, ... *thông thường là* $x = \pm\sqrt{m}$, $x = \pm 2\sqrt{m}$, ...

* *Nếu phương trình (A) có chứa tham số m, ta đoán nghiệm bằng cách thay các giá trị của x để làm mất tham số m.*

* *Nếu phương trình (A) có nghiệm hữu tỉ* $x = \frac{P}{q}$ *thì P là ước của d, q là ước của a (đoán* $x = \pm 2, \pm 3, ...$*)*

Định lí Viét của phương trình bậc 3

Ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

II. Phương trình bậc 4

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \ (a \neq 0)$$

• *Bảng tóm tắt cách đặt ẩn phụ để đưa phương trình bậc 4 đặt biệt về phương trình bật hai*

Phương trình	*Ẩn phụ*	*Phương trình mới*
$ax^4 + bx^2 + c$	$t = x^2 \geq 0$	$at^2 + bt + c = 0$
$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k\ (\neq 0)$ *Thỏa* $a + b = c + d$	$t = (x + a)(x + b)$	$a't^2 + b't' + c' = 0$
$(x + a)^4 + (x + b)^4 = k\ (k \neq 0)$	$t = x + \dfrac{a+b}{2}$	$a't^2 + b't + c' = 0$
$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$	$t = x \pm \dfrac{1}{x}, \lvert t\rvert \geq 2$	$a't^2 + b't + c = 0$
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $ae \neq 0$ và $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{b}{d}\right)^2$	$t = x + \dfrac{\lambda}{x}$ với $\lambda = \dfrac{d}{b}$	$a't^2 + b't + c' = 0$
$a(x-1)^2 + b(x^2+x+1)^2 + c(x^3-1) = 0$ *Tổng quát :* $a.A(x) + bB(x) + cC(x) = 0$ *Với* $A(x)B(x) = C^2(x)$	*chia 2 vế cho* $B(x) = (x^2 + x + 1)^2$ *Rồi đặt* $t = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$	$a't^2 + b't + c' = 0$

372 Phân tích ra thừa số : $a^5 + a + 1$

Giải

Ta có : $a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1)$

$= a^2 (a-1) (a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)$

$= (a^2 + a + 1) [a^3 - a^2 + 1]$.

373 Phân tích ra thừa số : $f(x) = (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$.

Giải

Đặt : $y = x^2 + x$.

Ta có : $f(y) = y^2 - 14y + 24 = y^2 - 2y - 12y + 24$

$= y(y - 2) - 12(y - 2) = (y - 2) (y - 12)$

$= (x^2 + x - 2) (x^2 + x - 12)$.

374 Phân tích ra thừa số : $f(x) = x^3 - 19x - 30$.

Giải

Ta cần có dạng : $x^3 - 19x - 30 \equiv (x + a) (x^2 + bx + c)$

$\equiv x^3 + (a + b)x^2 + (ab + c)x + ac$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab + c = -19 \\ ac = -30 \end{cases}$$

Vì ac = –30 nên ta có thể chọn a = 2, c = –15, khi đó thì b = –2. Với 3 giá trị trên ta có:

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15).$$

375 Phân tích ra thừa số : $f(x) = x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4$ (1)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $(x^4 + 12x^3 + 36x^2) - (4x^2 + 8x + 4)$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 + 6x)^2 - (2x + 2)^2$ $\Leftrightarrow$ $(x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2)$

Ghi chú: Một số trường hợp phương trình bậc 3, bậc 4 giải được nhưng khó đoán được 1 nghiệm của nó. ta thường sử dụng cách phân tích vế trái của phương trình thành tích số (như các bài tập trên) để đưa phương trình cho về dạng tích, rồi cho từng thừa số bằng 0.

376 Định a, b sao cho $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức khác.

Giải

Đặt : $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2$

$\Leftrightarrow$ $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b \equiv x^4 + \alpha^2x^2 + \beta^2 + 2\alpha x^3 + 2\alpha\beta x + 2\beta x^2$

$\Leftrightarrow$ $2x^3 + 3x^2 + ax + b \equiv 2\alpha x^3 + (2\beta + \alpha^2)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta + \alpha^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = a \\ b = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

377 Cho f(x) là đa thức bậc 3, biết rằng f(x) chia hết cho (x – 2), f(x) chia cho (x + 1), (x + 2), (x – 1) có dư số đều bằng –4. Hãy tìm f(x).

Giải

Từ giả thiết ta có: f(x) + 4 chia hết cho (x + 1), (x + 2), (x – 1)

Mà f(x) + 4 là đa thức bậc 3 nên ta suy ra:

$$f(x) + 4 = a(x + 1)(x + 2)(x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad f(2) = 0 \Rightarrow \quad 12a - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)(x + 2)(x - 1) - 4$ là đa thức cần tìm.

378 Định a, b sao cho $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$

chia hết cho $g(x) = x^2 - x + b$.

Giải

Ta có:

$$(6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2) \equiv (x^2 - x + b)(6x^2 + \alpha x + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad -7x^3 + ax^2 + 3x + 2 \equiv (\alpha - 6)x^3 + (\beta - \alpha + 6b)x^2 + (b\alpha - \beta)x + b\beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 6 = -7 \\ \beta - \alpha + 6b = a \\ b\alpha - \beta = 3 \\ b\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \\ b = -1 \\ a = -7 \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ b = -2 \\ a = -12 \end{cases}$$

379 Giải các phương trình bậc 3: sau đây :

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ **2)** $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$

3) $2x^2 + x + 3 = 0$ **4)** $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$.

Giải

1) Ta có : $a + b + c + d = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm $x = 1$. Nên

$(1) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$ (chia theo Horner)

$(1) \Leftrightarrow x = 1,\ x = 2,\ x = 3$

2) Ta dễ thấy $x = 2$ là 1 nghiệm của phương trình (2) . Nên

$$(2) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 3x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3) Ta có : $a - b + c - d = 0 \Rightarrow$ pt (3) có 1 nghiệm $x = -1$. Nên

$(3) \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

4) Ta dễ thấy $x = \sqrt{3}$ là một nghiệm của pt (4) . Nên

$(4) \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3},\ x = \sqrt{3} - \sqrt{2},\ x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

380 Định m để các phương trình sau đây có 3 nghiệm phân biệt .

1) $x^3 - (2m + 1)x^2 + 3(m + 4)x - m - 12 = 0$ (1)

2) $mx^3 - 2mx^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0$ (2)

Giải

1) Vì a + b + c + d = 0 nên pt (1) có 1 nghiệm x = 1. Nên

(1) $\Leftrightarrow$ $(x-1)(x^2-2mx+m+12)=0$

Nên pt (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)=x^2-2mx+m+12=0$

Có hai nghiệm phân biệt và đều khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g = m^2-m-12>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \vee 4<m \\ m\neq 13 \end{cases}$$

Vậy các giá trị m cần tìm là : $x \in (-\infty, -3) \cup (4, 13) \cup (13, +\infty)$.

2) Vì a − b + c − d = 0 nên pt (2) có 1 nghiệm x = − 1. Nên

(2) $\Leftrightarrow$ $(x+1)(mx^2-3mx+m+1)=0$

(2) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)=mx^2-3mx+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt và đều khác (−1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta = 5m^2-4m>0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 5m^2-4m>0 \\ 5m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<0 \vee \dfrac{4}{5}<m \\ m\neq -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m<-\frac{1}{5} \vee -\frac{1}{5}<x<0 \vee \frac{4}{5}<x$.

381 Định m để phương trình :

$$mx^3-(3m-4)x^2+(3m-7)x-m+3=0 \quad (A)$$

có 3 nghiệm dương phân biệt.

Giải

Ta có $a+b+c+d=0 \Rightarrow$ phương trình (A) có 1 nghiệm x = 1.

Nên (A) $\Leftrightarrow$ $(x-1)[mx^2-2(m-2)x+m-3]=0$

(A) có 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=mx^2-2(m-2)x+m-3=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt đều khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2-m(m-3)>0 \\ S=\dfrac{m-2}{m}>0 \\ P=\dfrac{m-3}{m}>0 \\ g(1)=m-2(m-2)+m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, 4).$$

382 Định m để phương trình sau có 3 nghiệm số phân biệt

$$x^3 - 1 - m(x - 1) = 0 \quad (1)$$

Giải

Ta dễ thấy x = 1 là 1 nghiệm của phương trình (1). Nên

(1) $\Leftrightarrow$ $(x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0$

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x) = x^2 + x + 1 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m - 3 > 0 \\ g(1) = 1 + 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3}{4} \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m \neq 3.$$

383 Giải phương trình : $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$ (1)

Biết phương trình có 2 nghiệm mà tích bằng –1.

Giải

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm có tích bằng –1 ta có : $x_1.x_2 = -1$

Theo định lí Viet ta có : $x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x_3 = \dfrac{1}{2}$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow$ $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 10x - 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

384 Định m để phương trình : $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $2x_2 = x_1 + x_3$.

Giải

- Theo Viet : $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow 3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow m = 11.$
- Đảo : khi m = 11, phương trình cho trở thành :

  $(x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 1 - 2\sqrt{3}, x = 1 + 2\sqrt{3}$

  Ta thấy các nghiệm này thỏa mãn yêui cầu bài toán vậy giá trị m cần tìm là m = 11.

385 Giải phương trình : $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$ (1)

Giải

Ta dễ thấy $x = \sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình (1), nên

$$x^3 - x - \sqrt{2} = (x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0 \ (VN) \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

386 Giải phương trình : $x^3 - 4mx^2 + m^2x + 6m^3 = 0$ (1)

Giải

Ta dễ thấy $x = -m$ là 1 nghiệm của phương trình (1) nên

$$x^3 - 4mx^2 + m^2x + 6m^3 = (x + m)(x^2 - 5mx + 6m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x^2 - 5mx + 6m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m \\ x_2 = 2m \\ x_3 = 3m. \end{cases}$$

387 Giải phương trình : $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$ (1)

Giải

Vì $1 + 4 = 2 + 3$, nên ta đặt : $t = (x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$

$$\Rightarrow (x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6 = t + 2$$

Nên (1) $\Leftrightarrow t(t + 2) = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = -3$

* Với $t_1 = 1 = x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

* Với $t_2 = -3 = x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 7 = 0$ (VN) vì $\Delta < 0$.

Tóm lại phương trình (1) có 2 nghiệm : $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2}$.

388 Giải phương trình : $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$ (1)

Giải

Đặt : $t = x + \dfrac{3 + 5}{2} = x + 4 \Rightarrow x + 3 = t - 1$ và $x + 5 = t + 1$

Do đó (1) $\Leftrightarrow (t - 1)^4 + (t + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0$

(1) $\Leftrightarrow 2t^2(t^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Vậy $0 = x + 4 \Leftrightarrow x = -4$.

389 Giải phương trình : $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$ (1)

Giải

Ta có : $\frac{e}{a} = 4$; $\left(\frac{d}{b}\right)^2 = \left(\frac{-10}{-5}\right)^2$

Ta chia 2 vế của (1) cho $x^2 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 - \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 5\left(x + \frac{2}{x}\right) + 8 = 0$$

Đặt : $t = x + \frac{2}{x} \Rightarrow t^2 - 4 = x^2 + \frac{4}{x^2}$; $|t| \geq 2\sqrt{2}$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \text{ (loại)} \\ t_2 = 4 > 2\sqrt{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy $4 = x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow 4x = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{2} \\ x_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

390 Giải phương trình : $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = 0$ (1)

Giải

(Phương trình có các hệ số đối xứng)

Chia 2 vế của (1) cho $x^2 \neq 0$ ta có (vì $x = 0$ không thỏa (1))

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

Đặt : $t = x + \frac{1}{x}$; $|t| \geq 2 \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$$(1) \Leftrightarrow 2(t^2 - 2) + 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \quad \text{(loại)} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Phương trình cho vô nghiệm.

391 Giải phương trình : $x^4 + 4x - 1 = 0$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + 4x - 1 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0 \quad (2) \\ x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(2) có $\Delta < 0$ nên vô nghiệm.

(3) có $\Delta = 4\sqrt{2} - 2$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \\ x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}. \end{cases}$$

392 Giải phương trình : $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \text{ (VN)} & (2) \\ x^2 + 3x - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

393 Giải các phương trình : **1)** $(x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = 297$ (1)

2) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -36$

Giải

1) Vì $-1 + 5 = -3 + 7 = 4$ nên ta đặt : $t = (x - 1)(x + 5) = x^2 + 4x - 5$

và $(x - 3)(x + 7) = x^2 + 4x - 21 = t - 16$

Vậy (1) $\Leftrightarrow t(t - 16) = 297 \Leftrightarrow t^2 - 16t - 297 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -11 \\ t_2 = 27 \end{cases}$

* $-11 = x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 6 = 0$ (VN)

* $27 = x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 4 \end{cases}$

2) Vì $2 + 1 = -3 + 6$ nên ta đặt : $t = (x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$

và $(x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18 = t - 20$

Vậy (2) $\Leftrightarrow t(t - 20) = -36 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 18 \end{cases}$

* $2 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

* $18 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; x = -4$

Vậy phương trình (2) có 4 nghiệm $x = 0$, $x = -3$, $x = 1$, $x = -4$.

394 Giải các phương trình sau : **1)** $x^4 + (x-1)^4 = 97$ (1)

2) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$ (2)

Giải

1) Đặt $t = x + \dfrac{0-1}{2} = x - \dfrac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^4 = 97$

$$\Leftrightarrow \left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 - 2\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t^2-\frac{1}{4}\right)^2 = 97$$

Đặt $u = t^2 \geq 0$. Giải ra ta được : $x = 3 \vee x = -2$.

2) Đặt $t = x + \dfrac{3+5}{2} = x + 4$

(2) $\Leftrightarrow$ $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$

$\Leftrightarrow$ $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 16$

$\Leftrightarrow$ $2t^4 + 12t^2 - 14 = 0$ $\Leftrightarrow$ $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$

Đặt $u = t^2 \geq 0$

(2) $\Leftrightarrow$ $u^2 + 6u - 7 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} u_1 = 1 \\ u_2 = -7 \text{ (loại)} \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $t^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $t = \pm 1$

- $t = 1$ $\Leftrightarrow$ $1 = x + 4$ $\Leftrightarrow$ $x = -3$
- $t = -1$ $\Leftrightarrow$ $-1 = x + 4$ $\Leftrightarrow$ $x = -5$.

395 Giải các phương trình : **1)** $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

2) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

Giải

1) (Nhận xét phương trình (1) có các hệ số đối xứng)

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1), ta chia 2 vế cho $x^2 \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow$ $6x^2 + \dfrac{6}{x^2} - 35\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 62 = 0$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$; $|t| \geq 2$ $\Rightarrow$ $t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

(1) $\Leftrightarrow$ $6(t^2 - 2) - 35t + 62 = 0$

Giải ra tìm t, rồi giải phương trình $t = x + \frac{1}{x}$, ta có :

$$x = 2 \; ; \; x = \frac{1}{2} \; ; \; x = 3 \; ; \; x = \frac{1}{3}.$$

2) (Phương trình (2) có $a + b + c + d + e = 0 \rightarrow x = 1$)

$$(1) \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 2x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình (2) có 3 nghiệm : $x = 1$, $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

396 Giải phương trình : $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 3) = 24$

Đặt $t = (x + 1)(x + 4) \Rightarrow t + 2 = (x + 2)(x + 3)$

$(1) \Leftrightarrow t(t + 2) = 24 \Rightarrow t_1 = 4 \vee t_2 = -6$

* $t = x^2 + 5x + 4 = 4 \Rightarrow x = 0, x = -5$

* $t = x^2 + 5x + 4 = -6 \Rightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ VN

Tóm lại phương trình cho có 2 nghiệm $x = 0, x = -5$.

397 Giải phương trình : $(x^2 + 3x - 4)^2 + 3(x^2 + 3x - 4) = x + 4$ (1)

(ĐH Ngoại thương – 2000)

Giải

$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 (x + 4)^2 + 3(x - 1)(x + 4) - (x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 4)[(x - 1)^2 (x + 4) + 3(x - 1) - 1] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 4)x (x^2 + x - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0. \end{cases}$

398 Tìm các giá trị của m để phương trình :

$x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5 = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2(m - 2)t + m^2 - 5m + 5 = 0$ với $t = x^2 \geq 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m^2 - 5m + 5 > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \vee \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} < m \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < m < \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

399 Định a, b để phương trình : $x^4 - 4x^3 + (4 + a)x + b = 0$ (1) có 2 nghiệm kép phân biệt.

Giải

(1) có 2 nghiệm kép phân biệt x_1, x_2 nên :

$$x^4 - 4x^3 + (4 + a)x + b = (x - x_1)^2(x - x_2)^2$$

$$\equiv x^4 - 2(x_1 + x_2)x^3 - (x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2)x^2 - 2(x_1x_2^2 - x_2x_1^2)x$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad x^4 - 2(x_1 + x_2)x^3 - (x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2)x^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)x + x_1^2x_2^2$$

Đồng nhất hai vế, ta có :

$$\begin{cases} -4 = -2(x_1 + x_2) \\ 0 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \\ 4 + a = -2x_1x_2(x_1 + x_2) \\ b = x_1^2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (2) \\ (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = 0 & (3) \\ 2(x_1 + x_2)x_1x_2 = -4 - a & (4) \\ b = x_1^2x_2^2 & (5) \end{cases}$$

Hệ (2) và (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$ thỏa điều kiện $S^2 - 4p \geq 0$

Thế vào (4), (5), ta được : $a = b = 4$. Đáp số : $a = b = 4$.

400 Giải phương trình $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$, biết rằng phương trình có hai nhgiệm mà tính bằng -1.

Giải

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm có $x_1x_2 = -1$

Theo định lí Viet, ta có : $x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{1}{2}$

Do đó ta có : $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(12x^2 + 10x - 12) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{2} \\ 12x^2 + 10x - 12 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

99 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tìm chân trị của p và q khi biết "$p \Rightarrow q$" sai và $p \wedge \bar{q}$ đúng là:

a) p : Đ, q : S **b)** p : Đ, q : Đ **c)** p : S, q : S **d)** p : S, q : Đ.

2. Tìm chân trị của p và q khi biết "$\bar{p} \vee q$" sai và "$p \Rightarrow q$" sai là:

a) p : Đ, q : Đ **b)** p : Đ, q : S **c)** p : S, q : Đ **d)** p : S, q : S.

3. Tìm chân trị của p và q khi "$p \vee q$" sai và "$p \Rightarrow p \vee q$" đúng :

a) p : Đ, q : Đ **b)** p : Đ, q : S **c)** p : S, q : S **d)** p : S, q : Đ.

4. Cho A = {a, b, c, d, e, f}. Số các tập con của A là :

a) 64 **b)** 32 **c)** 128 **d)** 16.

5. Cho A = {a, b, c, d, e, f}. Số tập con có 2 phần tử của A là :

a) 9 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 16.

6. Cho A = {0, 1, 2, 3, 4} ; B = {2, 3, 4, 5, 6}. Tập A\B bằng

a) {0} **b)** {0, 1} **c)** {5, 6} **d)** {0, 5}.

7. Cho A = {0, 1, 2, 3, 4} ; B = {2, 3, 4, 5, 6}. Tập $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ bằng :

a) {5, 6} **b)** {0, 1, 5, 6} **c)** {2, 4, 6} **d)** {0, 1, 5, 6}.

8. Sử dụng ký hiệu khoảng để viết tập hợp $C = [-3, 8) \cap (1, 11)$

a) (−3, 8) **b)** (1, 8) **c)** [−3, 11) **d)** (8, 11).

9. Cho $A = (-\infty, -3]$; $B = [-3, +\infty)$; $C = (-2, -1]$. Tìm $A \cup B \cup C$

a) {−3} **b)** $(-\infty, +\infty)$ **c)** (−2, −1] **d)** ∅.

10. Tập $E = (5, +\infty) \backslash (-\infty, 1]$ bằng :

a) [1, 5) **b)** (5, +∞) **c)** (1, +∞) **d)** (−∞, 5).

11. Cho A = [1, 4] ; B = (2, 6) ; C = (1, 2). Tìm $A \cap B \cap C = E$

a) E = ∅ **b)** E = (1, 4] **c)** E = (2, 4) **d)** E = [1, 6).

12. Tìm miền xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + x}$

a) R **b)** [−1, +∞) **c)** R\{1} **d)** R\{0, −1}.

13. Tìm miền xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x - 2}$

a) R\{2} **b)** [−1, +∞)\{2} **c)** [2, +∞) **d)** R.

14. Tìm miền xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} + \sqrt{5-x^2}$

a) R **b)** R\{2} **c)** $[1, \sqrt{5}] \setminus \{2\}$ **d)** $[1, +\infty)$.

15. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4x+3}$. Kết quả nào sau đây đúng

a) $f(0) = -\frac{5}{3}$, $f(1) = -\frac{3}{2}$, $f(-3) = -\sqrt{8}$

b) $f(0) = -\frac{5}{3}$, f(1) không xác định, $f(-3) = -\frac{11}{24}$

c) $f(0) = 3$, $f(2) = \frac{5}{3}$, $f(-3) = \frac{1}{5}$

d) f(3) không xác định, $f(1) = -\frac{3}{2}$, $f(2) = 0$.

16. Tìm giá trị bé nhất của hàm số $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

a) min y = 0 **b)** min y = −1 **c)** min y = 1 **d)** min y = −2.

17. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \frac{-x^2+2x+3}{x^2+2x+3}$

a) min y = −2, max y = 1 **b)** min y = −1, max y = 3

c) min y = −1, max y = 1 **d)** min y = 0, max y = 5.

18. Tìm GTNN của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$

a) min y = 1 **b)** min y = 0 **c)** min y = −3 **d)** min y = 4.

19. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$

a) T = R\{1} **b)** T = R\{3} **c)** T = R **d)** $T = [3, +\infty)$.

20. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \sqrt{x^2+4}$

a) T = [−2, 2] **b)** $T = [2, +\infty)$ **c)** T = R **d)** $T = [-2, +\infty)$.

21. Tìm miền giá trị của hàm số $y = x^2 + 2x - 1$

a) $T = [-2, +\infty)$ **b)** $T = [0, \infty)$ **c)** T = R **d)** $T = [-1, +\infty)$.

22. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2}$

a) Hàm số nghịch biến R

b) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$ và đồng biến trên $(0, +\infty)$

c) Hàm số đồng biến trên R

d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$ và nghịch biến trên $(0, +\infty)$.

23. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$

a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó

c) Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$, nghịch biến trên $(\infty, 0)$

d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 3)$, nghịch biến trên $(3, \infty)$.

24. Xét sự biến thiên của hàm số : $y = -x^2 + 4x$

a) Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 2)$, nghịch biến trên $(2, +\infty)$

b) Hàm số đồng biến trên R

c) Hàm số nghịch biến trên R

d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$, nghịch biến trên $(0, +\infty)$.

25. Tìm miền xác định D và tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sqrt{x^2 + |x|}$

a) D = R, lẻ **b)** D = R, chẵn

c) $D = R\setminus\{\pm 1\}$, lẻ **d)** D = R, không chẵn, không lẻ.

26. Tìm miền xác định D và tính chẵn lẻ của $y = x^5 - 2x^3 - 7x$

a) D = R, chẵn **b)** D = R, lẻ

c) $D = R\setminus\{0\}$, lẻ **d)** $D = [0, +\infty)$, lẻ.

27. Tìm miền xác định D và tính chẵn lẻ của hàm số : $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

a) $D = R\setminus\{\pm 1\}$, chẵn **b)** $D = R\setminus\{\pm 1\}$, lẻ

c) $D = R\setminus\{\pm 2\}$, lẻ **d)** $D = [1, +\infty)$, lẻ.

28. Tìm miền xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

a) D = R, lẻ **b)** D = R, chẵn

c) $D = [1, +\infty)$, lẻ **d)** $D = [0, \infty)$ không chẵn, không lẻ.

29. Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm P(−1, 2) ; Q(2, −1)

a) $y = -x + 1$ **b)** $y = 2$ **c)** $y = -x + 4$ **d)** $y = -5x$

30. Viết phương trình đường thẳng qua O(0, 0) và B(3, –2)

a) $y = -\frac{2}{3}x$ **b)** $y = -3x + 2$ **c)** $y = -x + 1$ **d)** $y = 5x$

31. Tìm tọa độ giao điểm của $y = -x + 3$ và $y = -x^2 + 4x + 1$

a) (3, 2) và (–1, 4) **b)** (–1, 4) và (–2, 5)

c) $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **d)** (2, 0) và $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

32. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 4 - x^2$

a) (2, 0) **b)** (2, 1) **c)** (–1, 4) **d)** (–2, 5).

33. Tìm phương trình Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng parabol đó cắt trục hoành tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$

a) $y = x^2 + 3x + 2$ **b)** $y = 2x^2 - 4x + 2$

c) $y = x^2 - 3x + 2$ **d)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$.

34. Tìm phương trình Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng Parabol đó đạt cực đại bằng 3 tại $x = 1$.

a) $y = 3x^2 + x + 2$ **b)** $y = -x^2 + 2x + 2$

c) $y = x^2 - 2x + 2$ **d)** $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$.

35. Tìm phương trình Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng Parabol đó đi qua điểm C(1, –1) và có trục đối xứng là $x = 2$.

a) $y = 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = x^2 - 4x + 2$

c) $y = x^2 + x - 5$ **d)** $y = x^2 + x + 2$.

36. Tìm phương trình Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng Parabol đạt cực tiểu bằng $\frac{3}{2}$ tại $x = -1$.

a) $y = x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x + 2$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ **d)** $y = x^2 + 5x + 2$.

37. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 12x - 5y = 63 \\ 8x - 15y = 77 \end{cases}$ là :

a) (–1, 5) **b)** (4, –3) **c)** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ **d)** (1, 5).

38. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{3y} = 2 \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2x} = 1 \end{cases}$ là :

a) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$ **c)** $(-3, 4)$ **d)** $(4, -3)$.

39. Tìm m để phương trình $3(m + 4)x + 1 = 2x + 2(m - 3)$ có nghiệm là:

a) $m \neq -\dfrac{10}{3}$ **b)** $m \neq -\dfrac{3}{4}$ **c)** $m \neq -4$ **d)** $m \neq 3$.

40. Tìm m, n để phương trình sau có vô số nghiệm :

$$(m + 1)(x + 2) = 2x - n - 5$$

a) $m = 1, n = -9$ **b)** $m = -1, n = -9$

c) $m = -1, n = 5$ **d)** $m = 1, n = 3$.

41. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm $(m^2 - 2)(x + 1) = x + 2$

a) $m = 0$ **b)** $m = \pm 1$ **c)** $m = \pm 3$ **d)** $m = \pm 2$.

42. Định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} (m - 1)x + my = -1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

a) $m \neq \dfrac{3}{5}$ **b)** $m \neq \dfrac{1}{5}$ **c)** $m \neq \dfrac{2}{5}$ **d)** $m \neq \dfrac{4}{5}$.

43. Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm $\begin{cases} x - y = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

a) $m = -1$ **b)** $m = 1$ **c)** $m = 2$ **d)** $m = -2$.

44. Định m để hệ phương trình sau đây vô số nghiệm $\begin{cases} ax - y = a^2 \\ bx - y = b^2 \end{cases}$

a) $a = 0, b = 1$ **b)** $a = 2, b = 1$

c) $a = 1, b = 2$ **d)** $a = 1, b = 1$.

45. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y + z = z \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3 \end{cases}$ là :

a) $(4, 2, 5)$ **b)** $(3, 1, 4)$ **c)** $(-2, 3, -1)$ **d)** $(1, 2, 3)$.

46. Bất đẳng thức nào sau đây đúng $\forall a, b \in R$.

a) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ **b)** $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ **d)** Cả ba đáp án trên đúng.

47. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ **b)** $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$

c) $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$ **d)** $\left(\frac{a+b}{2}\right) > a^2 + b^2$.

48. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng.

a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9$ **b)** $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

c) $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$ **d)** Cả 3 câu trên đều đúng.

49. $\forall a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức :

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3 \quad (1)$$

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (2)$$

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad (3)$$

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + bac \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3 \quad (4)$$

Mệnh đề nào đúng ?

a) 1, 2 **b)** 1, 2, 3 **c)** 2, 3 **d)** 1, 3.

50. Tìm GTNN của $y = \frac{-x^2 + 2x + 5}{-x^2 + 2x + 3}$ là :

a) $\frac{1}{2}$ **b)** 1 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}$.

51. Tìm GTLN của $Q = \frac{3}{4x^2 - 4x + 5}$

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{2}{4}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{5}{4}$.

52. Tìm GTNN của $P = x^2 + 26y^2 - 10xy + 14x - 76y + 59$

a) -10 **b)** 1 **c)** -9 **d)** $= 29$.

53. Tìm GTLN của $P = (x^2 - 2x + 1)(-2x^2 + 4x + 2)$

a) 3 **b)** 16 **c)** 42 **d)** 2.

54. Tìm giá trị LN của $y = \dfrac{x^2 - 6x + 14}{x^2 - 6x + 12}$

a) 2 **b)** 5 **c)** 1 **d)** 3.

55. Tìm GTLN, GTNN của $y = \dfrac{5 - x^2}{3 + x^2}$

a) max y = 4, min y = -3 **b)** max y = 3, min y = -3

c) max y = 27, min y = 1 **d)** max y = $\dfrac{5}{3}$, min y không có.

56. Tìm GTLN, GTNN của $y = \dfrac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1}$

a) max y = +3, min y =1 **b)** max y = 6, min y = -2

max y =.+5, min y = 1 **d)** max y = 4, min y = -2.

ghiệm của bất phương trình $\dfrac{3x + 5}{2} - 1 \le x + \dfrac{x + 2}{3}$ là

a) $x \le -5$ **b)** $x \le -1$ **c)** $x \ge 3$ **d)** $x \ge 2$.

58. Nghiệm của bất phương trình $2(x - 1) - x > 3(x - 1) - 2x - 5$ là :

a) $x \le 3$ **b)** $\forall x \in R$ **c)** $x \ge 1$ **d)** $x \le \dfrac{5}{2}$.

59. Nghiệm của bất phương trình $5(x - 1) - x(7 - x) < x^2$

a) $x < 3$ **b)** $x \ge 7$ **c)** $x \ge 1$ **d)** $x > -\dfrac{5}{2}$.

60. Tìm các giá trị nguyên của x thỏa bất phương trình : $5x - \dfrac{1}{3} > 12 - \dfrac{2x}{3}$

a) $\{x \in N, x \ge 3\}$ **b)** $\{x \in N, x \ge 2\}$

c) $\{x \in N, x \ge 1\}$ **d)** $\{x \in N, x \ge 5\}$.

61. Nghiệm của bất phương trình $(-3x + 2)(x + 1)(4x - 5) \ge 0$

a) $-1 \le x \le \dfrac{1}{2} \vee x \ge 2$ **b)** $-3 \le x \le 1 \vee x \ge 5$

c) $-1 \le x \le \dfrac{2}{3} \vee x \ge \dfrac{5}{4}$ **d)** $-\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{3}{2} \vee x \ge 4$.

62. Nghiệm của bất phương trình $\frac{-2x+3}{(3x-1)(x-4)} \le 0$

a) $-3 < x \le \frac{1}{2} \vee \frac{4}{3} < x < 5$ **b)** $-4 < x < 3$

c) $-1 \le x \le \frac{2}{3} \vee x \ge \frac{5}{4}$ **d)** $\frac{1}{3} < x \le \frac{3}{2} \vee x \ge 4$.

63. Nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-4x+3}{(x+2)(x-3)} + \frac{1}{2} \le 0$ là

a) $-2 < x \le 0 \vee \frac{9}{5} \le x < 3$ **b)** $x \le -5 \vee \frac{2}{3} < x < 1$

c) $-\frac{11}{3} < x < -2 \vee x > 2$ **d)** $-\frac{11}{3} < x < -1 \vee x \ge 2$.

64. Định m để phương trình sau có nghiệm $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$

a) $m \le \frac{1}{2}$ **b)** $|m| \ge \frac{3}{2}$ **c)** $m = 6$ **d)** $\frac{11}{3} \le m \le \frac{49}{2}$.

65. Định m để bất phương trình sau đúng với mọi x :

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x + m) \ge 0$$

a) $m = -2$ **b)** $m < 2$

c) $-\frac{4}{3} < m < \frac{1}{2}$ **d)** $0 < m < \frac{7}{2}$.

66. Định m để bất phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + 5 - m > 0$ đúng với mọi $x < 1$.

a) $-1 < m < 3$ **b)** $0 < m < \frac{3}{2}$

c) $m > 4$ **d)** $-\frac{4}{3} < m < -\frac{1}{3}$.

67. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ là :

a) (1, 3), (3, 1) **b)** (1, 2), (2, 1) **c)** $\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

68. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = \frac{7}{2} \\ x^2y + xy^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$ là :

a) (1, 2) ; (2, 1) **b)** (0, 2) ; (2, 0) **c)** (1, 3) ; (3, 1) **d)** $\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

69. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$ là :

a) $\left\{(2, 2) ; (-1, -1) ; \left(\frac{1+\sqrt{19}}{2}, \frac{1-\sqrt{19}}{2}\right) ; \left(\frac{1-\sqrt{19}}{2}, \frac{1+\sqrt{19}}{2}\right)\right\}$

b) $\left\{(1, 1) ; (-1, -1) ; \left(\frac{3}{\sqrt{161}}, \frac{17}{\sqrt{161}}\right) ; \left(\frac{-3}{\sqrt{161}}, \frac{-17}{\sqrt{161}}\right)\right\}$

c) $\{(0, 0) ; (5, 5) ; (-1, 2) ; (2, -1)\}$

d) $\left\{(-3, -3) ; (-2, -2) ; \left(\frac{1+\sqrt{31}}{2}, \frac{1-\sqrt{31}}{2}\right) ; \left(\frac{1-\sqrt{31}}{2}, \frac{1+\sqrt{31}}{2}\right)\right\}$.

70. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y = 1 \\ y^2 - yx + x = 1 \end{cases}$ là :

a) $\{(1, 1) ; (0, 1) ; (1, 0)\}$ **b)** $\{(0, 1) ; (1, 0) ; (5, 5)\}$

c) $\left\{(2, 2) ; (-3, -3) ; \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) ; \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$

d) $\{(0, 0) ; (5, 5) ; (-1, 2) ; (2, -1)\}$.

71. Nghiệm của phương trình $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ là :

a) $\left\{(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) ; (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) ; (3, 1) ; (-3, -1)\right\}$

b) $\left\{(2, 1) ; (-2, -1) ; \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) ; \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

c) $\{(-5, -2) ; (-4, 3)\}$

d) $\{(3, 2) ; (2, 3) ; (2, 1) ; (-1, -2)\}$.

72. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5 \end{cases}$ là :

a) $\left\{(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) ; (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) ; (3, 1) ; (-3, -1)\right\}$

b) $\left\{(2, 1) ; (-2, -1) ; \left(\frac{4}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right) ; \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$

c) $\{(3, 1) ; (1, 3)\}$ **d)** $\{(5, 3) ; (3, 5) ; (1, 2) ; (2, 1)\}$.

73. Nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2y} + x + 2y = 5 \\ \dfrac{x+2y}{x-2y} = 6 \end{cases}$ là :

a) $(2, 1)$; $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{11}{3}, -\dfrac{24}{5}\right)$; $(-2, -1)$

c) $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{8}\right)$;$\left(\dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{12}\right)$ **d)** $(1, 1)$; $(-1, -1)$.

74. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 - y^3 = x - y \end{cases}$

a) $(0, 1)$; $(1, 0)$; $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ **b)** $(2, 1)$; $(1, 2)$; $\left(-\dfrac{4}{9}, \dfrac{16}{9}\right)$

c) $(-1, 3)$; $(-10, 21)$ **d)** $(-1, 2)$; $(2, -1)$; $(1, 4)$.

75. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 5 \\ (x + y)\dfrac{x}{y} = 6 \end{cases}$ là :

a) $(2, 1)$; $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ **b)** $(-2, -1)$; $(-1, -2)$

c) $(-1, 1)$; $(1, 1)$ **d)** $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{8}\right)$;$\left(\dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{12}\right)$.

76. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

a) $(1, 2)$; $(2, 1)$ **b)** $(0, 2)$; $(2, 0)$

c) $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$;$\left(\dfrac{1}{3}, 3\right)$ **d)** $(0, 1)$; $(1, 0)$.

77. Nghiệm của phương trình $|2x + 11| = x - 3$ là :

a) $x \in \{1, 2\}$ **b)** $\varnothing$

c) $x \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, 2\right\}$ **d)** $x \in \{0, 1\}$.

78. Nghiệm của phương trình $|2x^2 - 3x + 1| = 2x^2 + x - 1$ là :

a) $x \in \left\{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, -3\right\}$ **b)** $\varnothing$ **c)** $x = \dfrac{1}{2}$ **d)** $x \in \{0, 1\}$.

79. Nghiệm của bất phương trình $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| > 2$ là :

a) $x \in \left\{\frac{3}{5}, -1, -\frac{3}{2}\right\}$ **b)** $x \in \left\{\frac{3}{5}, -1, +\frac{3}{2}\right\}$

c) $x \in (-1, 2) \cup (3, 7)$ **d)** $x \in \left(0, \frac{8}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

80. Nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 4x| < 5$

a) $x \in (-7, 2)$ **b)** $x \in (-1, 5)$

c) $x \in \left(0, \frac{8}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$ **d)** $x \in (-1, 2) \cup (3, 6)$.

81. Nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$

a) $x < 3 \vee 2 < x$ **b)** $x < 3$

c) $x > 1 \vee x < 0$ **d)** $x < -2 \vee x > -1$.

82. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3|y| - 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ là :

a) (0, 3) ; (4, 1) **b)** (−5, 2) ; (−2, −1)

c) (3, 7) ; (7, 3) **d)** (2, 3) ; (−7, 1).

83. Xác định m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm

$$(m - 3)x^2 + (m + 3)x - (m + 1) = 0$$

a) $m < \frac{1 - \sqrt{10}}{3}$ hay $m > \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$ và $m \neq 3$

b) $m = 1, m = -3$ **c)** $m = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} < x < \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$

d) $m = 3, -1$.

84. Định m để phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$ có nghiệm kép :

a) $m = 2$ **b)** $m = -1$ **c)** $m = 3$ **d)** $m = -2$.

85. Định m để phương trình $(m - 3)x^2 + (m + 3)x - (m + 1) = 0$ vô nghiệm :

a) $+\frac{1 - \sqrt{10}}{3} < m < \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$ **b)** $m < -3 \vee 2 < m$

c) $-5 < m < 1$ và $m \neq -2$ **d)** $m = 3$.

86. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$ có 1 nghiệm thỏa $1 < x < 2$ và nghiệm kia lớn hơn 2 :

a) $m = -1$ **b)** $-3 < m < \frac{1}{3}$ **c)** $m > \frac{2}{3}$ **d)** $-1 < m < \frac{2}{3}$.

87. Nếu phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$ có 1 nghiệm bằng 2 thì nghiệm còn lại là :

a) $x = \frac{2}{3}$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = -\frac{2}{3}$.

88. Nghiệm của phương trình $x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0$ là :

a) $x \in \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ **b)** $x \in \left\{-1, 1 \pm \sqrt{2}\right\}$

c) $x \in \left\{2, -1 \pm \sqrt{6}\right\}$ **d)** $x \in \left\{-1, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

89. Nghiệm của phương trình $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ là :

a) $x \in \{2, 3\}$ **b)** $\left\{0, -3, \frac{-4 \pm \sqrt{21}}{3}\right\}$

c) $x \in \{1, -3, 5, 6\}$ **d)** $x \in \{-1, 2\}$.

90. Nghiệm của phương trình $(x + 2)(x + 1)(x - 1)x = 24$ là :

a) $x \in \left\{0, -1, \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$ **b)** $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

c) $x \in \{-1, 2\}$ **d)** $x \in \{2, 3\}$.

91. Xác định m để phương trình: $(m-1)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + m\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + 2m + 3 = 0$ có nghiệm :

a) $\frac{8}{7} \le m \le 16$ **b)** $m \le -2 \vee m \ge 0$

c) $m < -\frac{9}{2} \vee m > 5$ **d)** $\frac{-2-\sqrt{88}}{7} \le m \le -\frac{1}{2}$.

92. Định m để phương trình : $m\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 - 4(m+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + m - 5 = 0$ có nghiệm là :

a) $m < -\frac{9}{2} \vee m > 5$ **b)** $m < -2 \vee m > 0$

c) $\frac{1}{7} \le m \le 12$ d) $m < -\frac{3}{2} \vee m > 1$.

93. Nghiệm của phương trình $\sqrt{26 - x^2} + 4 = x$ là :

a) $x = 8$ b) $\varnothing$ c) $x = 2$ d) $x = 5$.

94. Nghiệm của phương trình $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$ là :

a) $x \in \{0, 3\}$ b) $x \in \{-7, 1\}$

c) $x \in \left\{0, 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$ d) $x \in \{-1, 2, 3\}$.

95. Nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$ là :

a) $0 \le x \le 2$ b) $-7 \le x \le 1$

c) $x \le 1 \vee 2 \le x \le 7$ d) $x = 3$.

96. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$ là :

a) $x = 10$ b) $x = 3$ c) $x = 2$ d) $x \in \{1, 3\}$.

97. Nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0$

a) $[2, +\infty)$ b) $\left(1, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$

c) $[-20, 0) \cup (5, \infty)$ d) $(-\infty, 4]$.

98. Nghiệm của bất phương trình $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} \le \sqrt{2x+7}$

a) $[9, +\infty)$ b) $(-2, +\infty)$

c) $\left(\frac{7}{2}, 5\right) \cup (5, 26)$ d) $\left[0, \frac{1}{4}\right) \cup (4, +\infty)$.

99. Nghiệm của bất phương trình :

$$\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} \le \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$$ là :

a) $\left(-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ b) $(-3, 1) \cup (3, 7)$

c) $(-\infty, -5] \cup \left[5, \frac{17}{5}\right) \cup \{3\}$ d) $x \in \{-1, -2, -3\}$.

ĐÁP ÁN

1	a	**26**	b	**51**	c	**76**	d
2	b	**27**	a	**52**	b	**77**	b
3	c	**28**	d	**53**	d	**78**	c
4	a	**29**	a	**54**	c	**79**	a
5	c	**30**	a	**55**	d	**80**	b
6	b	**31**	b	**56**	d	**81**	b
7	b	**32**	a	**57**	a	**82**	b
8	b	**33**	c	**58**	b	**83**	a
9	b	**34**	b	**59**	d	**84**	b
10	b	**35**	b	**60**	a	**85**	a
11	a	**36**	c	**61**	c	**86**	d
12	b	**37**	b	**62**	d	**87**	a
13	b	**38**	a	**63**	a	**88**	b
14	c	**39**	a	**64**	b	**89**	d
15	b	**40**	a	**65**	a	**90**	d
16	b	**41**	b	**66**	b	**91**	d
17	a	**42**	a	**67**	b	**92**	a
18	b	**43**	b	**68**	d	**93**	d
19	b	**44**	d	**69**	c	**94**	c
20	b	**45**	a	**70**	a	**95**	a
21	a	**46**	d	**71**	a	**96**	c
22	b	**47**	a	**72**	b	**97**	c
23	a	**48**	c	**73**	c	**98**	a
24	a	**49**	b	**74**	a	**99**	c
25	b	**50**	c	**75**	a		

MỤC LỤC

Chương 1 : ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP
CHỨNG MINH QUY NẠP 3

Chương 2 : HÀM SỐ 28

Chương 3 : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 59

Chương 4 : BẤT ĐẲNG THỨC 78

Chương 5 : BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 106

Chương 6 : PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 125

Chương 7 : HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 161

Chương 8 : CÁC PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC 2, PHƯƠNG TRÌNH CÓ CĂN 198

Chương 9 : SƠ ĐỒ HORNER, PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3, PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 212

Câu hỏi trắc nghiệm 225

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04)39714896; (04)39724770. Fax: (04)39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: QUỐC TUẤN – VIỆT HƯNG
Sửa bài: PHƯƠNG THẢO
Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN
Trình bày bìa: THÁI VĂN

Thực hiện liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

SÁCH LIÊN KẾT

TUYỂN CHỌN 400 BÀI TOÁN ĐẠI SỐ 10

Mã số: 1L - 24ĐH2009
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 162 - 2008/CXB/07- 25/ĐHQGHN ngày 26/2/2008
Quyết định xuất bản số: 24LK - TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2009.